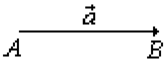
Вектори в просторі

Величини, які визначаються числовим значенням і напрямом називаються **векторними величинами**. Наприклад: сила, швидкість, прискорення.

Величини, які визначаються одним числовим значенням називаються **скалярними величинами**. Наприклад: висота, температура, маса.



Вектором називається відрізок даної довжини і даного напряму – напрямлений відрізок і позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ називається **протилежним** вектору $\overrightarrow{AB}$. В цьому випадку пишуть $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Відстань між початком і кінцем вектора називається його довжиною або **модулем**. Модуль вектора позначають: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Нульовим вектором $\vec{0}$ називається вектор, початок і кінець якого збігаються, $\overrightarrow{AA}$ – нульовий вектор. Модуль нульового вектора дорівнює нулю $\left|\overrightarrow{AA}\right| = 0$.

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці називається **одиничним вектором** і позначається $\vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$.

Два вектори називаються **колінеарними,** якщо зображаючі їх напрямні відрізки паралельні або хоча б один з них дорівнює нулю.

Три вектори називаються **компланарними,** якщо зображаючі їх напрямні відрізки паралельні одній площині (або розміщені в одній площині) або хоч один з них дорівнює нулю.

Два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **рівними** (пишуть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), якщо вони колінеарні і мають однакову довжину і напрям.

Сумою двох векторів є вектор.

Правило трикутника: для того щоб додати два не колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ потрібно початок вектора $\vec{b}$ помістити в кінець вектора $\vec{a}$, тоді вектор, початок якого знаходиться в початку вектора $\vec{a}$, а кінець в кінці вектора $\vec{b}$ і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.1).

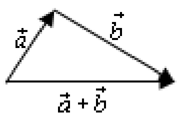


Рис.1

Правило паралелограма: для того щоб додати два не колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які мають спільний початок, потрібно на цих векторах добудувати паралелограм, тоді вектор, який збігається з діагоналлю паралелограма і має початок в початку даних векторів є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис.2).

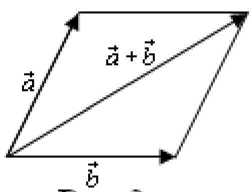


Рис.2

Сумою двох колінеарних векторів, напрями яких збігаються, є вектор, напрям якого збігається з напрямом даних векторів, а його модуль дорівнює сумі модулів даних векторів (рис.3).

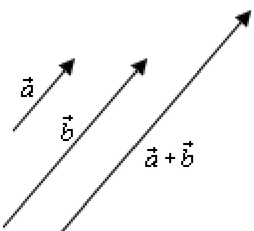


Рис.3

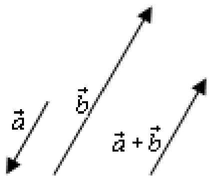


Рис.4

Сумою двох колінеарних векторів є вектор, напрям якого збігається з напрямом того вектора, модуль якого більший, а його модуль дорівнює різниці більшого і меншого модулів даних векторів (рис.4).

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$ (рис.5).

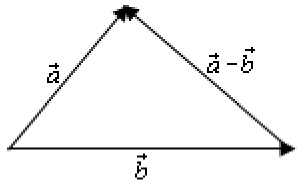


Рис.5

Закони додавання векторів:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – переставний закон,
2. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ – сполучний закон,
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a},$
4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ є вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо число λ додатнє, і йому протилежний, якщо число від'ємне. Його модуль дорівнює добутку модулів вектора $\vec{a}$ і числа λ.

Закони множення вектора на скаляр:

1. $\left(m+n\right)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a},$
2. $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=m\vec{a}+m\vec{b},$
3. $m\left(n\vec{a}\right)=\left(mn\right)\vec{a},$
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a},\ \left(-1\right)\cdot\vec{a}=-\vec{a},\ 0\cdot\vec{a}=\vec{0}.$

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається число, яке дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь однаково напрямлені, і мінус довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь протилежно напрямлені.

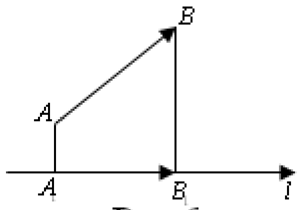


Рис.6

Властивості проекції:

1. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між вектором і віссю.
$$Пр_l\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi$$
2. Проекція суми (різниці) декількох векторів на вісь дорівнює сумі (різниці) проекцій цих векторів на ту ж вісь.
$$Пр_l\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)=Пр_l\vec{a}\pm Пр_l\vec{b}$$
3. При множенні вектора на число λ його проекція на вісь також множиться на це число.
$$Пр_l\left(\lambda\vec{a}\right)=\lambda\cdot Пр_l\vec{a}$$

Лінійна залежність векторів і базис

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними,** якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ не всі рівні нулеві, для яких має місце рівність:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0.$$

Якщо ж рівність $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0$ виконується лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$, то вектори називаються **лінійно незалежними.**

Вираз $\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$.

Вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді коли принаймні один з них є лінійною комбінацією інших.

Два будь-яких лінійно незалежних вектори на площині називаються **базисом.** Якщо вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ утворюють базис на площині, то будь-який вектор $\vec{a}$ цієї площини можна подати як лінійну комбінацію базисних векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, тобто

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2.$$

Розклад вектора по базису єдиний.

Базисом в тривимірному просторі називається три будь-яких лінійно незалежних вектори.

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис тривимірного простору R^3, то будь-який вектор $\vec{a}$ з цього простору однозначно розкладається за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ тобто виконується співвідношення:

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3.$$

Приклад 1. Довести, що вектори $\vec{a}(0;-5;7)$, $\vec{b}(3;-2;-1)$, $\vec{c}(1;5;3)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}(20;-27;35)$ в цьому базисі.

Розв’язання.

Розв’яжемо рівняння $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0$. Маємо

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}0\\-5\\7\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ -5\lambda_1 - 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0; \\ 7\lambda_1 - 1\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 169 \neq 0.$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$. Отже, задані вектори лінійно незалежні і утворюють базис тривимірного простору R^3.

Знайдемо координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі. Для цього розв’яжемо рівняння $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}20\\-27\\35\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}0\\-5\\7\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_2 + \alpha_3 = 20; \\ -5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = -27; \\ 7\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 35. \end{cases}$$

Оскільки головний визначник цієї системи $\Delta = 169 \neq 0,$ то система має єдиний розв'язок. Знайдемо його, використавши формули Крамера:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta};\ \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta};\ \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 20 & 3 & 1 \\ -27 & -2 & 5 \\ 35 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 845;\ \Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 1 \\ -5 & -27 & 5 \\ 7 & 35 & 3 \end{vmatrix} = 1014;\ \Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 20 \\ -5 & -2 & -27 \\ 7 & -1 & 35 \end{vmatrix} = 338.$$

Одержуємо:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta} = \frac{845}{169} = 5;\ \alpha_2 = \frac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta} = \frac{1014}{169} = 6;\ \alpha_3 = \frac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta} = \frac{338}{169} = 2.$$

Отже, в базисі $\vec{a}(0;-5;7),\ \vec{b}(3;-2;-1),\ \vec{c}(1;5;3)$ вектор $\vec{d}(20;-27;35)$ має координати $(5;6;2)$.

Декартів прямокутний базис

В прямокутній системі координат у просторі $Oxyz$ виберемо на кожній осі одиничний вектор, напрям якого збігається з додатнім напрямом осі, а початок знаходиться в початку координат. Так на осі Ox візьмемо одиничний вектор $\vec{i}$, на осі Oy – одиничний вектор $\vec{j}$, на осі Oz – одиничний вектор $\vec{k}$. Вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворюють базис, який називається декартовим прямокутним базисом.

Теорема про розклад вектора по базису. Який би не був вектор $\vec{a}$, **його завжди можна розкласти і притому єдиним способом по базису** $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1. **Координати вектора.**

   Якщо відомі координати початку вектора – точки $A(x_1; y_1; z_1)$ та кінця вектора – точки $B(x_2; y_2; z_2)$, тоді **координати вектора** $\overrightarrow{AB}$ дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

2. **Рівні вектори.**

   Вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ **рівні** тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2$.

Приклад 1. Дано чотири точки: $A(2;7;-3), B(1;0;3), C(-3;-4;5), D(-2;3;-1)$. Вкажіть серед векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ рівні пари.

Розв'язання.

Знаходимо координати векторів і порівняємо їх.

$\overrightarrow{AB} = (1-2; 0-7; 3-(-3)) = (-1;-7;6);$

$\overrightarrow{BC} = (-3-1; -4-0; 5-3) = (-4;-4;2);$

$\overrightarrow{DC} = (-3+2; -4-3; 5+1) = (-1;-7;6);$

$\overrightarrow{AD} = (-2-2; 3-7; -1+3) = (-4;-4;2);$

$\overrightarrow{AC} = (-3-2;-4-7;5+3) = (-5;-11;8);$

$\overrightarrow{BD} = (-2-1;3-0;-1-3) = (-3;3;-4).$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$

Приклад 2. Дано три точки: $A(1;0;1), B(-1;1;2), C(0;2;-1)$. Знайдіть точку $D(x;y;z)$, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB} = (-1-1;1-0;2-1) = (-2;1;1);$

$\overrightarrow{CD} = (x-0;y-2;z+1) = (x;y-2;z+1).$

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $x=-2;$ $y-2=1;$ $z+1=1.$

$y=3;$ $z=0.$

Отже, $D(-2;3;0)$.

3. Модуль вектора.

Модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

4. Проекції вектора на осі координат.

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат знаходяться за формулами:

$$a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha;\quad a_y = |\vec{a}|\cdot\cos\beta;\quad a_z = |\vec{a}|\cdot\cos\gamma.$$

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma -$ називають **напрямними косинусами вектора** $\vec{a}$.

Напрямні косинуси знаходяться за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

5. Сума двох векторів.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ є вектор, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат доданків:

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1)+\vec{b}(x_2;y_2;z_2) \Leftrightarrow \vec{c}(x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2).$$

Приклад 3. Дано три точки: $A(1;0;1), B(-1;1;2), C(0;2;-1)$. Знайдіть точку $D(x;y;z)$, якщо сума векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнює нулю.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB} = (-1-1;1-0;2-1) = (-2;1;1);$

$\overrightarrow{CD} = (x-0;y-2;z+1) = (x;y-2;z+1).$

Оскільки за умовою задачі $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=0$, то маємо:

$$\begin{cases} -2+x=0; \\ 1+y-2=0; \\ 1+z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2; \\ y=1; \\ z=-2. \end{cases}$$

Отже, $D(2;1;-2)$.

6. **Різниця двох векторів.**

Різницею векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ є вектор, координати якого дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів:

$$\vec{a}(x_1;y_1;z_1)-\vec{b}(x_2;y_2;z_2)\Leftrightarrow \vec{c}(x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2).$$

7. **Скалярний добуток векторів.**

Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$

Геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію на нього другого вектора: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ називається число (скаляр): $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+\ y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2.$

Властивості скалярного добутку

1. Скалярний добуток двох векторів володіє комутативною властивістю:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\ .$$
2. Скалярний добуток двох векторів володіє сполучною властивістю відносно скалярного множника λ:
$$\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{b}\right).$$
3. Скалярний добуток векторів володіє розподільною властивістю:
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\ .$$
4. Якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулеві, то або хоч один з цих векторів рівний нуль-вектору, або косинус кута між ними дорівнює нулеві, тобто вектори перпендикулярні.
5. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:
$$\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2,$$
звідси,
$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\ .$$

8. **Кут між векторами.**

Косинус кута φ між векторами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ знаходять за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

або в координатній формі

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Приклад 4. Дано чотири точки: $A(0;1;-1), B(1;-1;2), C(3;1;0), D(2;-3;1)$. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Розв’язання.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB} = (1-0; -1-1; 2+1) = (1; -2; 3);$

$\overrightarrow{CD} = (2-3; -3-1; 1-0) = (-1; -4; 1).$

Знайдемо модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14};$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

Знайдемо скалярний добуток векторів:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = -1 + 8 + 3 = 10.$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{10}{6\sqrt{7}} = \frac{5}{3\sqrt{7}}.$$

Приклад 5. Дано три точки: $A(0;1;-1), B(1;-1;2), C(3;1;0)$. Знайдіть косинус кута C трикутника ABC.

Розв'язання.

$\angle C -$ кут між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{CA} = (0-3; 1-1; -1-0) = (-3; 0; -1);$

$\overrightarrow{CB} = (1-3; -1-1; 2-0) = (-2; -2; 2).$

Знайдемо модулі векторів $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$:

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10};$

$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

Знайдемо скалярний добуток векторів:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = 6 + 0 - 2 = 4.$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{4}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{30}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{2}{15}}.$$

9. Векторний добуток векторів.

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступні три умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах, тобто
$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi;$$
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
3) напрям вектора $\vec{c}$ такий, що якщо дивитись з його кінця вздовж вектора, то поворот по найкоротшому шляху від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ видно таким, що здійснюється проти руху годинникової стрілки (вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів).

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначають $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторний добуток двох векторів заданих своїми координатами

Якщо вектори $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ та $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ задані своїми координатами, то їх векторний добуток знаходиться за формулою:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Основні властивості векторного добутку

1. При перестановці множників векторний добуток міняє свій знак, зберігаючи модуль:
$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}\,.$$
2. Векторний добуток двох векторів володіє сполучною властивістю відносно скалярного множника λ:
$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}).$$
3. Векторний добуток векторів володіє розподільною властивістю:
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\,.$$
4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.
5. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\ \ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\ \ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\ \ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\ \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

10. Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Мішаним добутком трьох векторів є деяке число.

Мішаний добуток векторів заданих своїми координатами

Якщо вектори $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ і $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ задані своїми координатами, то їх мішаний добуток знаходиться за формулою:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

11. Умова колінеарності векторів.

Вектори $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ **колінеарні** тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні: $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Приклад 6. Дано вектори $\vec{a}(2;n;3)$ і $\vec{b}(3;2;m)$. При яких значеннях m і n ці вектори колінеарні?

Розв’язання.

Для того щоб вектори були колінеарні, їх координати повинні бути пропорційні, тобто $\dfrac{2}{3}=\dfrac{n}{2}=\dfrac{3}{m}$; звідси $\dfrac{2}{3}=\dfrac{n}{2}$, $\quad\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{m}$;

$$n=\frac{4}{3}; \qquad m=\frac{9}{2}.$$

Отже, $n=\frac{4}{3}$; $m=\frac{9}{2}$.

Приклад 7. Дано вектори $\vec{a}(1;2;3)$. Знайдіть колінеарний йому вектор з початком у точці $A(1;1;1)$ і кінцем у точці B на площині xy.

Розв'язання.

Точка B лежить у площині xy, значить $z=0$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-1;0-1)=(x-1;y-1;-1)$.

Дістанемо пропорцію: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}$;

$\frac{x-1}{1}=\frac{-1}{3}$; $\qquad \frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}$;

$x-1=-\frac{1}{3}$; $\qquad y-1=-\frac{2}{3}$;

$x=\frac{2}{3}$. $\qquad y=\frac{1}{3}$.

Отже, $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$.

12. Умова компланарності векторів.

Вектори **компланарні** тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулеві: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$,

або у координатній формі

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 8. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}(2;3;-1)$, $\vec{b}(1;-1;3)$, $\vec{c}(1;9;-11)$.

Розв'язання.

Перевіримо чи виконується умова компланарності:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=2\cdot(11-27)-3\cdot(-11-3)-1\cdot(9+1)=$$

$$=-32+42-10=0.$$

Отже, вектори компланарні.

13. Умова перпендикулярності векторів.

Два відмінні від нуля вектори $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ **перпендикулярні** тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0.$

Приклад 9. При яких значеннях n вектори $\vec{a}(2;-1;3)$ і $\vec{b}(1;3;n)$ перпендикулярні?

Розв'язання.

Умова перпендикулярності векторів: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0.$ Тому

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+3\cdot(-1)+3\cdot n=0;$

$3\cdot n=1;$

$n=\frac{1}{3}.$

Отже, $n=\frac{1}{3}.$

Приклад 10. Дано три точки: $A(1;0;1),B(-1;1;2),C(0;2;-1)$. Знайдіть точку на осі z таку точку $D(0;0;c)$, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були перпендикулярні.

Розв'язання.

За умовою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0.$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{AB}=(-1-1;1-0;2-1)=(-2;1;1);$

$\overrightarrow{CD}=(0-0;0-2;c+1)=(0;-2;c+1).$ Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-2\cdot0+(-2)\cdot1+(c+1)\cdot1=c-1=0;$ $c=1.$ Отже, $D(0;0;1).$

14. Множення вектора на скаляр.

Координати **добутку вектора** $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ **на число** λ дорівнює добутку відповідних координат даного вектора на це число, тобто: $\lambda\vec{a}(x_1;y_1;z_1)=(\lambda x_1;\lambda y_1;\lambda z_1).$

Приклад 11. Знайти довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо $A(2;-6;0),B(-4;8;2),D(0;-12;0).$

Розв'язання.

Оскільки $\overrightarrow{AB}(-6;14;2)$, $\overrightarrow{AD}(-2;-6;0)$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}(-8;8;2)$ (рис.7).

Тоді $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-8)^2+8^2+2^2}=\sqrt{132}=2\sqrt{33}.$

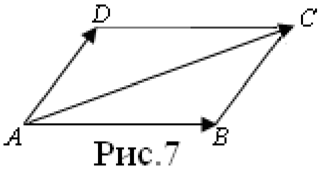


Рис.7

Приклад 12. Знайти кут між стороною AC і медіаною BM трикутника ABC, якщо $A(-3;-5;1),B(-4;-1;-2),C(3;3;1).$

Розв'язання.

Кут між стороною AC і медіаною BM дорівнює куту φ між векторами

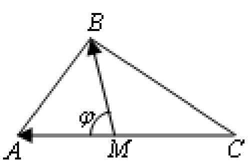


Рис.8

$\overrightarrow{MA}$ та $\overrightarrow{MB}$ (рис.8), або, якщо кут між цими векторами тупий, – куту $180^\circ - \varphi$. Знайдемо координати точки M: $M\left(\frac{-3+3}{2};\frac{-5+3}{2};\frac{1+1}{2}\right)$; $M(0;-1;1)$.

Тоді $\overrightarrow{MB}(-4;0;-3)$, $\overrightarrow{MA}(-3;-4;0)$,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \frac{(-4)\cdot(-3)+0\cdot(-4)+(-3)\cdot 0}{\sqrt{(-4)^2+0^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0^2}} = \frac{12}{25}.$$

$\varphi = \arccos\frac{12}{25}$ – гострий кут. Отже, кут між стороною AC і медіаною BM дорівнює $\arccos\frac{12}{25}$.

Приклад 13. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}(3;0;-4)$, $\overrightarrow{AD}(0;5;0)$.

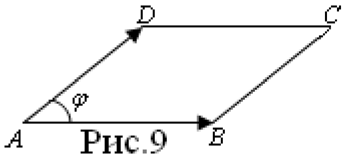


Рис.9

Розв’язання.

Нехай паралелограм $ABCD$ побудований на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис.9). Площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними: $S = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\sin\varphi.$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{9+0+16} = 5;$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{0^2+5^2+0^2} = \sqrt{0+25+0} = 5.$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 3\cdot 0 + 0\cdot 5 + (-4)\cdot 0 = 0.$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{0}{5\cdot 5} = 0.$$

Оскільки $\cos\varphi = 0$, то $\varphi = 90^\circ$. Тоді $\sin\varphi = 1$ і $S = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\sin\varphi = 5\cdot 5\cdot 1 = 25.$

Вправи

1. Знаючи координати векторів $\vec a(1;-2;2)$, $\vec b(11;2;10)$, $\vec c(8;4;8)$, обчислити:
   1. $\vec a + \vec b$;
   2. $\vec a - \vec b$;
   3. $2\vec a$;
   4. $\vec a\vec b$;
   5. $|\vec a|$; $|\vec b|$;
   6. $\cos\angle(\vec a, \vec b)$;
   7. $\text{ï ð}_{\vec b}\vec a$;
   8. площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ і $\vec b$;
   9. об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

   Відповіді:
   1. $\vec a + \vec b = (12;0;12)$;
   2. $\vec a - \vec b = (-10;-4;-8)$;
   3. $2\vec a = (2;-4;4)$;

4. $\vec{a}\vec{b} = 27;$
5. $|\vec{a}| = 3; \ \ |\vec{b}| = 15;$
6. $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \arccos\frac{3}{5};$
7. $\text{ï ð}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5};$
8. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 12\vec{j} + 24\vec{k};$

   $S = \sqrt{(-24)^2 + 12^2 + 24^2} = 36;$
9. $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right| = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 8 \end{matrix} \right\| = 48.$

2. Дано вектори $\vec{a}(3;-6;-1)$, $\vec{b}(1;4;-5)$, $\vec{c}(3;-4;12)$. Обчислити проекцію $\text{ï ð}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$
3. Дано вектори $\vec{a}(1;-3;4)$, $\vec{b}(3;-4;2)$, $\vec{c}(-1;1;4)$. Обчислити проекцію $\text{ï ð}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}.$
4. Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.
5. Встановити, чи компланарні вектори:
   1) $\vec{a}(2;3;-1)$, $\vec{b}(1;-1;3)$, $\vec{c}(1;9;-11)$;
   2) $\vec{a}(3;-2;1)$, $\vec{b}(2;1;2)$, $\vec{c}(3;-1;-2)$;
6. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.
7. Обчислити мішані добутки $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ заданих векторів:
   1) $\vec{a}(1;2;3)$, $\vec{b}(3;1;2)$, $\vec{c}(2;3;1)$;
   2) $\vec{a}(4;7;8)$, $\vec{b}(6;4;5)$, $\vec{c}(1;2;3)$.
8. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:
   1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$;
   2) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.
9. Обчислити об'єм піраміди з вершинами в точках:
   1) $A(3;-2;5)$, $B(1;3;1)$, $C(-1;-1;3)$, $D(4;3;4)$;
   2) $A(1;-2;-1)$, $B(4;4;4)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;0;3)$.
10. Довести, що вектори $\vec{a}(2;1;-3)$, $\vec{b}(3;-2;1)$, $\vec{c}(-1;0;-2)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}(-2;2;1)$ в цьому базисі.
11. Довести, що вектори $\vec{a}(0;1;2)$, $\vec{b}(-1;0;3)$, $\vec{c}(1;2;-5)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}(0;3;0)$ в цьому базисі.

12. Довести, що вектори $\vec{a}(2;1;1)$, $\vec{b}(1;2;-2)$, $\vec{c}(1;1;2)$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}(4;3;-2)$ в цьому базисі.