Вектори в просторі

Лінійна залежність векторів і базис

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис тривимірного простору R^3, то будь-який вектор $\vec{a}$ з цього простору однозначно розкладається за векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ тобто виконується співвідношення:

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3.$$

Декартів прямокутний базис

1. Координати вектора.

$$A(x_1; y_1; z_1) - \text{початок},\ B(x_2; y_2; z_2) - \text{кінець},$$

$$\text{то } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

2. Рівні вектори.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2.$$

3. Модуль вектора.

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4. Проекції вектора на осі координат.

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha;\quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta;\quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

5. Сума двох векторів.

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) + \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \Leftrightarrow \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

6. Різниця двох векторів.

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1) - \vec{b}(x_2; y_2; z_2) \Leftrightarrow \vec{c}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

7. Множення вектора на скаляр.

$$\lambda\vec{a}(x_1; y_1; z_1) = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1).$$

8. Скалярний добуток векторів.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Геометричний зміст скалярного добутку: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, Пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$

Скалярним добутком: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$

9. Кут між векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},\quad \cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

10. Векторний добуток векторів.

$$S_{\text{ïàðàëåëîãðàì à}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|.$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|.$$

11. Мішаний добуток векторів.

$$V_{\text{ï àðàëåëåï³ï åäà}} = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|.$$

$$V_{\text{ï ³ðàì ³äè}} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}\right\|.$$

12. Умова колінеарності векторів.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

13. Умова перпендикулярності векторів.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0.$$

14. Умова компланарності векторів.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$