

Відстань між двома точками простору.

Координати середини відрізка

Виразимо відстань між двома точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ та $A_2(x_2; y_2; z_2)$ через координати цих точок:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Виразимо координати x, y, z середини C відрізка A_1A_2 через координати його кінців A_1 і A_2 .

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}; z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача 1. На осі x знайдіть точку $C(x; 0; 0)$, рівновіддалену від двох точок

$$A(1; 2; 3), B(-2; 1; 3).$$

▼ Знайдемо відстані AC і BC .

$$AC = \sqrt{(x-1)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4 + 9} = \sqrt{(x-1)^2 + 13};$$

$$BC = \sqrt{(x+2)^2 + (0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 1 + 9} = \sqrt{(x+2)^2 + 10}.$$

Прирівняємо рівності: $\sqrt{(x-1)^2 + 13} = \sqrt{(x+2)^2 + 10}$;

$$(x-1)^2 + 13 = (x+2)^2 + 10;$$

$$x^2 - 2x + 1 + 13 = x^2 + 4x + 4 + 10;$$

$$x^2 - 2x - x^2 - 4x = 4 + 10 - 1 - 13;$$

$$-6x = 0;$$

$$x = 0.$$

Отже, $C(0; 0; 0)$. ▲

Задача 2. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(1; 2; 3)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 1; 4)$, $D(2; 2; 2)$ є паралелограмом.

▼ Паралелограм – це чотирикутник, у якого діагоналі перетинаються в одній точці і діляться точкою перетину пополам. Визначимо координати середин відрізків AC та BD .

$$\text{Для діагоналі } AC \text{ маємо: } x = \frac{1+1}{2} = 1; y = \frac{2+1}{2} = 2; z = \frac{2+4}{2} = 3.$$

$$\text{Для діагоналі } BD \text{ маємо: } x = \frac{0+2}{2} = 1; y = \frac{2+2}{2} = 2; z = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Координати середин відрізків AC та BD однакові. Отже, $ABCD$ – паралелограм. ▲

Задача 3. Дано один кінець відрізка $A(2; 3; -1)$ і його середина $C(1; 1; 1)$.

Знайдіть другий кінець відрізка $B(x; y; z)$.

▼ Нехай O – середина відрізка AB , то $O\left(\frac{2+x}{2}; \frac{3+y}{2}; \frac{-1+z}{2}\right)$. За умовою

задачі координати середини відрізка дорівнюють $(1; 1; 1)$. Тому маємо:

$$\frac{2+x}{2} = 1; \frac{3+y}{2} = 1; \frac{-1+z}{2} = 1.$$

$$2 + x = 2; 3 + y = 2; -1 + z = 2.$$

$$x = 0; y = -1; z = 3.$$

Отже, $B(0; -1; 3)$. ▲

Задача 3. Доведіть, що середина відрізка з кінцями у точках $A(a; c; -b)$ та $B(-a; d; b)$ лежить на осі y .

▼ Якщо точка належить осі y , то координати x, z дорівнюють нулю.

$$M_{AB} \left(\frac{a-a}{2}; \frac{c+d}{2}; \frac{-b+b}{2} \right) = M_{AB} \left(0; \frac{c+d}{2}; 0 \right).$$

Отже, точка, яка є серединою відрізка AB лежить на осі y . ▲

Задача 4. Доведіть, що середина відрізка з кінцями у точках $C(a; b; c)$ та $D(p; q; -c)$ лежить на площині xy .

▼ Точка належить площині xy , якщо координата $z = 0$.

$$O_{CD} \left(\frac{a+p}{2}; \frac{b+q}{2}; \frac{c-c}{2} \right) = O_{CD} \left(\frac{a+p}{2}; \frac{b+q}{2}; 0 \right).$$

Отже, точка, яка є серединою відрізка CD лежить на площині xy . ▲

Вправи

1. Знайти координати середини відрізка ST , якщо:
1) $S(-4; 8; -5)$, $T(8; 6; -7)$; 3) $S(2; -7; -6)$, $T(6; -3; -2)$;
2) $S(-1; 13; 9)$, $T(10; -15; 2)$; 4) $S(5; 11; -1)$, $T(-4; 3; 5)$.
2. Точка C – середина відрізка MK . Знайти координати точки M , якщо $C(-6; 2; 3, 5)$, $K(0; -8; 3)$.
3. Точка M – середина відрізка AB . Знайти координати точки B , якщо $A(-3; 8; 5)$, $M(-5; 4; -6)$.
4. Точка K – середина відрізка BC . Знайти координати точки C , якщо $B(-4; 5; -3)$, $K(1; 2; -2)$.
5. Знайти координати точки, яка ділить відрізок MK у відношенні 3:1, рахуючи від точки M , якщо $M(3; -5; 1)$, $K(-1; 7; 5)$.
6. Знайти координати точки, яка ділить відрізок AB у відношенні 1:3, рахуючи від точки A , якщо $A(4; -5; 2)$, $B(12; -3; -4)$.
7. Знайти координати точки, яка ділить відрізок FN у відношенні 1:7, рахуючи від точки N , якщо $F(1; -5; -43)$, $N(-7; 23; 5)$.
8. Знайти координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(-3; -2; -1)$, $C(4; 7; -3)$, $D(-2; -5; 6)$.
9. Знайти координати вершини B паралелограма $ABCD$, якщо $A(-3; 8; -5)$, $C(-7; 6; 7)$, $D(4; -2; -3)$.
10. Знайти координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(3; -4; 5)$, $B(-6; 1; 6)$, $C(-5; 2; 1)$.

11. Знайти координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
- 1) $A(2;3;2)$, $B(0;2;4)$, $C(4;1;0)$;
 - 2) $A(1;-1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(-1;0;1)$;
 - 3) $A(4;2;-1)$, $B(1;-3;2)$, $C(-4;2;1)$.
12. Точки $C_1(2;-3;4)$ і $B_1(-6;1;2)$ – середини сторін AB і AC трикутника ABC відповідно. Знайти координати вершин A і B , якщо вершина C має координати $(-3;4;6)$.
13. Точки $A(4;1;-1)$, $B(2;4;-4)$, $C(1;2;1)$ – середини сторін трикутника. Знайти координати вершин цього трикутника.
14. Точки $M(-2;3;4)$, $N(3;5;2)$, $K(3;-5;1)$ – середини сторін трикутника. Знайти координати вершин цього трикутника.
15. Точки $A_1(-2;1;5)$, $B_1(4;-3;6)$, $C_1(-1;5;-7)$ – середини сторін трикутника. Знайти координати вершин цього трикутника.
16. Знайти відстань між точками A і B , якщо:
- 1) $A(3;-2;3)$, $B(-1;2;5)$;
 - 2) $A(1;5;-6)$, $B(-2;3;5)$;
 - 3) $A(7;-7;10)$, $B(1;-4;4)$;
 - 4) $A(5;-2;-1)$, $B(-3;4;3)$.
17. В трикутнику ABC $A(3;-1;-2)$, $B(-5;7;4)$, $C(1;5;2)$. Знайти довжину середньої лінії MN трикутника ABC , де M і N – середини сторін AC і BC відповідно.
18. В трикутнику ABC $A(3;-5;0)$, $B(7;1;4)$, $C(-3;9;-6)$. Знайти довжину середньої лінії MN трикутника ABC , де M і N – середини сторін AB і BC відповідно.
19. В трикутнику ABC $A(1;-8;12)$, $B(3;-4;10)$, $C(2;-5;2)$. Знайти довжину середньої лінії EF трикутника ABC , де E і F – середини сторін AC і AB відповідно.
20. Відстань між точками $A(-3;5;4)$ і $B(x;4;-3)$ дорівнює $5\sqrt{3}$. Знайти x .
21. Відстань між точками $A(4;-5;2)$ і $B(1;y;-4)$ дорівнює 7 . Знайти y .
22. Відстань між точками $A(2;3;z)$ і $B(1;-5;-2)$ дорівнює $7\sqrt{2}$. Знайти z .
23. На осі абсцис знайти точку, рівновіддалену від точок $A(4;-5;6)$ і $B(2;3;-4)$.
24. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(-2;3;1)$ і $B(1;2;-4)$.
25. На осі аплікат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;1;7)$ і $B(3;-3;-4)$.
26. Знайти координати точки, яка належить осі y і рівновіддалена від точок $A(4;-1;3)$ і $B(1;3;0)$.
27. Знайти координати точки, яка належить осі z і рівновіддалена від точок $A(1;-2;6)$ і $B(-1;2;5)$.

28. Довести, що трикутник ABC з вершинами в точках $A(4;2;10)$, $B(10;-2;8)$, $C(-2;0;6)$ рівнобедрений.
29. На осі y знайти таку точку, відстань від якої до точки $A(-4;0;9)$ в два рази більша від відстані до точки $B(4;0;-2)$.
30. На осі x знайти таку точку, відстань від якої до точки $A(0;2;-1)$ в три рази менша від відстані до точки $B(0;7;5)$.
31. Знайти координати точок A і B та довжину відрізка AB , якщо точка A належить осі x , точка B лежить у площині yz і точка $C(2;-9;-4)$ – середина відрізка AB .
32. Знайти координати точок A і B та довжину відрізка AB , якщо точка A належить осі y , точка B лежить у площині xz і точка $C(-2;1;-3)$ – середина відрізка AB .
33. Знайти координати точок A і B та довжину відрізка AB , якщо точка A належить осі z , точка B лежить у площині xy і точка $C(-12;10;-5)$ – середина відрізка AB .
34. Довести, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо:
- 1) $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$;
 - 2) $A(2;1;3)$, $B(1;0;7)$, $C(-2;1;5)$, $D(-1;2;1)$.
35. Довести, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо:
- 1) $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$;
 - 2) $A(0;2;0)$, $B(1;0;0)$, $C(2;0;2)$, $D(1;2;2)$.
36. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2;-3;1)$, $B(-1;0;4)$, $C(4;1;5)$ і $D(7;-2;2)$ є ромбом.
37. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2;1;-8)$, $B(1;-5;0)$, $C(8;1;-4)$ і $D(9;7;-12)$ є ромбом.
38. Довести, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1;5;3)$, $B(-3;7;-5)$, $C(3;1;-5)$ і $D(5;-1;3)$ є ромбом.
39. Довести, що точки $A(5;6;7)$, $B(-1;-1;-4)$ і $C(11;13;18)$ лежать на одній прямій. Яка з них лежить між двома іншими?