Системи лінійних рівнянь

Система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

називається **лінійною системою рівнянь.**

Система називається **неоднорідною,** якщо хоча б одне з чисел $b_1,\ b_2,\ \dots b_m$ відмінне від нуля.

Система називається **однорідною,** якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0.$

Перший індекс в позначенні коефіцієнта a_{ij} означає номер рівняння, а другий – номер невідомого. Кожне невідоме позначене однією буквою x з індексом, що означає його номер.

Розв'язком системи називається такий впорядкований набір чисел $\left(x_1^{\circ}, x_2^{\circ}, \dots, x_n^{\circ}\right)$, який перетворює всі рівняння системи в тотожності.

Система лінійних рівнянь називається **сумісною,** якщо вона має розв'язок, і **несумісною,** якщо вона не має розв'язку.

Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною,** якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною,** якщо вона має нескінченну множину розв'язків.

Дві системи лінійних рівнянь називаються **еквівалентними,** якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

Матриця складена з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **основною матрицею** системи.

Матриця складена з коефіцієнтів при невідомих та стовпця вільних членів

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається **розширеною матрицею** системи.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб

ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Висновки: 1. Система має єдиний розв'язок, якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, тобто $r(A)=r(A^*)=r=n,$ де $n-$ число невідомих.

2. Система має безліч розв'язків, якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, тобто $r(A)=r(A^*)=r<n,$

Формули Крамера

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Запишемо основну матрицю цієї системи

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначник матриці A позначимо через Δ і назвемо **головним визначником** системи. Отже,

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Позначимо через Δ_{x_k} $(k=1,2,\ldots,n)$ визначник n-го порядку, який утворюється з визначника Δ за допомогою заміни стовпця з коефіцієнтів при невідомому x_k на стовпець вільних членів:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера. Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, завжди має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\quad \ldots;\quad x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Ці формули називаються формулами Крамера.

При рівності нулю головного визначника системи можливі два випадки.

1. $\Delta = 0$ і всі $\Delta_{x_k} = 0$ $(k = 1,2,...,n)$. В цьому випадку система має нескінченну множину розв'язків.
2. $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_{x_k} \neq 0$ $(k = 1,2,...,n)$. При цих обмеженнях система не має розв'язку.

Матричний запис і матричне розв'язання системи лінійних рівнянь

Розглянемо основну матрицю системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

матриці-стовпці невідомих та вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді дану систему можна записати у вигляді $AX = B,$ який називається **матричним записом системи.**

Розв'язок матричного рівняння має вигляд $X = A^{-1}B.$

Для розв'язування системи лінійних рівнянь матричним методом потрібно:

1. Переконатись, що:
   1. система неоднорідна,
   2. кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих,
   3. матриця A невироджена.
2. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A.
3. Користуючись означенням, знайти добуток оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів B, тобто $A^{-1}B$.
4. З рівності матриць записати відповідь.

Метод Гаусса (послідовного виключення невідомих) розв'язування систем лінійних рівнянь

Суть методу Гаусса полягає в тому, що система лінійних рівнянь за допомогою еквівалентних перетворень зводиться до такого вигляду, коли всі коефіцієнти, що знаходяться нижче головної діагоналі основної матриці, дорівнюють нулеві.

Однорідна система рівнянь

Система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

називається **однорідною** системою рівнянь.

Висновки:

1. Однорідна система рівнянь завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0.$
2. Якщо головний визначник Δ однорідної систем рівнянь не дорівнює нулеві, то така система має єдиний розв'язок (нульовий).
3. Якщо головний визначник Δ однорідної систем рівнянь дорівнює нулеві, то така система має безліч розв'язків.
4. Ненульові розв'язки однорідної системи, якщо вони існують, можна знайти за допомогою методу Гаусса.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами: метод Крамара, матричний спосіб, метод Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

I. Метод Крамара.

Задана система рівнянь неоднорідна.

Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 3 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) =$$

$$= 2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 1 \cdot 1 = -10 + 21 + 1 = 12 \neq 0.$$

Вимоги теореми Крамера виконуються, тому її розв'язок можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \ \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \ \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + (4 \cdot 2 - 2 \cdot 1) =$$

$$= -3 \cdot (-2) + 6 = 6 + 6 = 12.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 3) =$$

$$= 2 \cdot (-2) + (-8) = -4 - 8 = -12.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 4) - 3 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 4) =$$

$$=2\cdot(-6)-3\cdot(-8)=-12+24=12.$$

За формулами Крамера знаходимо розв’язок системи:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{12}{12}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{-12}{12}=-1;\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{12}{12}=1.$$

Відповідь: $(1;-1;1)$.

II. Матричний спосіб.

Маємо неоднорідну систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Шукаємо розв’язок системи у вигляді:

$$X=A^{-1}B$$

де $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\2&1&4\\3&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

Обернена матриця A^{-1} матриці A існую, оскільки $\Delta=12\neq 0$ (така матриця називається невиродженою). Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix}=-5;\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}=-1;\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}=8;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=7;\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}=-1;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=1;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}=5;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-5&-1&8\\7&-1&-4\\1&5&-4\end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю $X=A^{-1}B$:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-5&-1&8\\7&-1&-4\\1&5&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-5\cdot0-1\cdot4+8\cdot2\\7\cdot0-1\cdot4-4\cdot2\\1\cdot0+5\cdot4-4\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}0-4+16\\0-4-8\\0+20-8\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}12\\-12\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(1;-1;1)$.

III. Метод Гаусса.

Щоб у першому рівнянні при x_1 стояв коефіцієнт,рівний одиниці, розділимо всі члени цього рівняння на 2, а потім помножимо одержане рівняння по черзі на -2 і -3 і складемо з другим і третім рівнянням відповідно. Одержимо:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \\ 0-2x_2+2x_3=4, \\ 0-\frac{5}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3=2. \end{cases}$$

Щоб у другому рівнянні при x_2 стояв коефіцієнт,рівний одиниці, розділимо всі члени цього рівняння на $-2,$ а потім помножимо його на $\frac{5}{2}$ і складемо з третім рівнянням. Одержимо:

$$\begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \\ 0-2x_2+2x_3=4, \\ 0-\frac{5}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \\ 0+x_2-x_3=-2, \\ 0+0-3x_3=-3. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0, \\ x_2-1=-2, \\ x_3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+\frac{3}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0, \\ x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

Відповідь: $(1;-1;1)$.

Приклад 2. Розв'язати однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x+2y+z=0, \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=12+2+1+4-3+2=18\neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок:

$$x=0;\quad y=0;\quad z=0.$$

Відповідь: $(0;0;0)$.

Приклад 3. Розв'язати однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x-3y-4z=0, \\ -x+y+z=0, \\ 4x+y=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, система визначена і має безліч розв’язків. Ненульові розв’язки системи знайдемо за допомогою методу Гауса:

$$\begin{cases} x-y-z=0, \\ 8x-3y-4z=0, \\ 4x+y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0, \\ -5y-4z=0, \\ -5y-4z=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0, \\ -5y-4z=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0, \\ y=-\dfrac{4}{5}z. \end{cases}$$

Нехай $z=5t$, тоді $y=-4t,$ а $x=t.$

Отримали: $x=t,\ \ y=-4t,\ \ z=5t,$ де $t-$будь-яке дійсне число.

Відповідь: $\{(t;-4t;5t) \mid t \in R\}.$

Вправи

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами: метод Крамара, матричний спосіб, метод Гаусса:

1. $\begin{cases} 3x-5y=13, \\ 2x+7y=81. \end{cases}$

Відповідь: $(16;7).$

2. $\begin{cases} 3x-4y=-6, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

Відповідь: $(2;3).$

3. $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x-5y=40. \end{cases}$

Відповідь: $(5;-4).$

4. $\begin{cases} 5x+2y=4, \\ 7x+4y=8. \end{cases}$

Відповідь: $(0;2).$

5. $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 3x-y=5. \end{cases}$

Відповідь: $(1;-2).$

6. $\begin{cases} 3x-2y=8, \\ 4x+5y=3. \end{cases}$

Відповідь: $(2;-1).$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=20, \\ 3x_1-x_2+x_3=9. \end{cases}$

Відповідь: $(1;1;7).$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

Відповідь: $(-8; -4; -13)$.

9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $(2; -1; 3)$.

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

Відповідь: $(3; 1; 1)$.

11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Відповідь: $(2; -2; 3)$.

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

Відповідь: $(1; -1; 2)$.

13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9. \end{cases}$

Відповідь: $(1; 2; -1)$.

14. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 28. \end{cases}$

Відповідь: $(2; 3; 4)$.

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

Відповідь: $\varnothing$.

16. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \dfrac{1}{3}, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: система має нескінченну кількість розв’язків.