Елементи лінійної алгебри

Матриці та дії над матрицями

Матрицею розмірності $m \times n$ називається множина чисел або інших елементів, які утворюють прямокутну таблицю, що має m рядків та n стовпців.

Матриці позначаються великими латинськими літерами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Елементи матриці позначають малими літерами з двома індексами. Наприклад, a_{ij}. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця в якому знаходиться даний елемент.

Матриця називається **прямокутною,** якщо кількість її рядків не дорівнює кількості стовпців $(m \neq n)$.

Наприклад, матриці $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 17 \end{pmatrix}$ і $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 10 \\ -5 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ прямокутні.

Матрицю розміру $1 \times n$ називають **матрицею-рядком:**

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Наприклад, матриця $K = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ – матриця-рядок.

Матрицю розмірності $n \times 1$ називають **матрицею-стовпцем:**

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Наприклад, $L = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець.

Матриця, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців $(m = n)$, називається **квадратною.**

Наприклад, матриці $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 9 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & 1 & -25 & 6 \\ 8 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ квадратні.

Число рядків чи стовпців квадратної матриці називається її **порядком.** Порядок матриці D дорівнює двом, порядок матриці F – п'яти.

Діагональ квадратної матриці порядку n, яка визначається елементами a_{11} та a_{nn}, називається **головною діагоналлю.**

Діагональ квадратної матриці порядку n, яка визначається елементами a_{1n} та a_{n1}, називається **допоміжною.**

Квадратна матриця в якій всі елементи, крім елементів головної діагоналі, рівні нулеві називається **діагональною матрицею.**

Наприклад, матриці $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – діагональні матриці.

Діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють одиниці, називається **одиничною матрицею** і позначається E.

Наприклад, матриці $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одиничні матриці.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулеві, називається **нульовою матрицею.**

Наприклад, матриця $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова квадратна матриця третього порядку.

Квадратна матриця, у якої всі елементи над (під) головною діагоналлю дорівнюють нулі, а інші є дійсними числами називається **трикутною**.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Дві матриці називаються **рівними,** якщо вони мають однакову розмірність і рівні відповідні елементи.

Наприклад, матриця $N_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ рівна матриці $N_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Якщо в матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ розмірності $m\times n$ поміняти місцями рядки і стовпці, то одержимо матрицю розмірності $n\times m$, яка називається **транспонованою матрицею** до матриці A і позначається

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Наприклад, матриця $A^T = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 9 & 17 \\ -1 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ є транспонованою до матриці

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 17 & 5 \end{pmatrix}$.

Властивості дії транспонування матриць:

1. Двічі транспонована матриця рівна початковій $A^{ÒÒ} = \left(À^{Ò}\right)^{Ò} = À.$
2. Транспонована матриця суми рівна сумі транспонованих матриць доданків $(A+B)^{Ò} = À^{Ò} + B^{Ò}$.
3. Транспонована матриця добутку рівна добутку транспонованих матриць співмножників, взятому в оберненому порядку $(A \cdot B)^{Ò} = B^{Ò} \cdot À^{Ò}$.

Матриця називається **симетричною,** якщо вона співпадає із своєю транспонованою матрицею, тобто $À^{Ò} = A.$

Очевидно, що:

– симетрична матриця обов’язково квадратна;

– елементи, симетричні відносно головної діагоналі матриці рівні;

– добуток $AÀ^{Ò}$ є симетричною матрицею.

Сумою двох матриць $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

однакової розмірності $m \times n$ є матриця $C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

такої самої розмірності, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів даних матриць $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Дія віднімання визначається аналогічно.

Додавати та віднімати можна лише матриці однієї розмірності.

Властивості дії додавання матриць:

1. $A + 0 = A.$

2. $A+B=B+A$– переставний закон додавання.
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ – сполучний закон додавання.

Приклад 1. Знайди суму матриць: $A_1=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$ та $A_2=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$:

Розв'язання. $A_1+A_2=\begin{pmatrix}-3+1 & 1+(-2) & 0+1\\ 2+0 & 3+(-1) & -2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Добутком числа k **на матрицю** A називається така матриця kA, елементи якої дорівнюють добутку числа k на відповідні елементи матриці A:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Властивості дії множення матриці на число:

1. $1\cdot A=A.$
2. $0\cdot A=0.$
3. $c\cdot(pA)=(cp)\cdot A.$
4. $(c+p)\cdot A=cA+pA.$
5. $c\cdot(A+B)=cA+cB.$

Матриця $(-1)\cdot A=-A$ називають **протилежною** для A. Якщо матриці відрізняються лише знаками своїх елементів, то їх називають **протилежними.**

Приклад 2. Обчислити $2A$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо добуток числа 2 на матрицю $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$:

$$2\cdot A=5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-2) & 2\cdot 1 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) & 2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 6\\ 0 & -6 & 8\end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти лінійну комбінацію матриць $2A-3B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо матрицю, яка є добутком числа 2 на матрицю A:
$2A=2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 4 & 6 & -2\end{pmatrix}$ та добуток числа 3 на матрицю B:
$3B=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$. Знаходимо лінійну комбінацію матриць $2A-3B$:

$$2A-3B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 4 & 6 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 9 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-(-3) & 0-9 & 2-0\\ 4-0 & 6-3 & -2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 2\\ 4 & 3 & -5\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти лінійну комбінацію матриць $2A^T-3B,$ якщо

$$A=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 0 & -2\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Матриця транспонована до матриці A: $A^T=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & -2\end{pmatrix}.$

$$2A^T-3B=2\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ 7 & -2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 14 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 9\\ 3 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -9\\ 11 & -16\end{pmatrix}.$$

Дві матриці A і B називаються **узгодженими,** якщо число стовпців матриці A (першої матриці) дорівнює числу рядків матриці B (другої матриці).

Для того, щоб матриці були узгодженими вони повинні мати розміри: $A=[m\times \underline{n}],\ B=[\underline{n}\times p].$

Добутком двох узгоджених **матриць** A і B називається третя матриця $C,$ кожний елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів $i-$рядка матриці A на відповідні елементи $j-$го стовпця матриці $B.$

Зауважимо, що з першої (лівої) матриці A використовують тільки рядки, а з другої (правої) матриці $B-$тільки стовпці. Формула знаходження елементів матриці C має вигляд:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj},\quad i=1,2,\ldots m;\quad j=1,2,\ldots p.$$

Якщо розміри матриць A і B відповідно $[m\times n]$ і $[n\times p],$ то розмір матриці $C=A\cdot B$ буде дорівнювати $[m\times p].$

Приклад 5. Знайти добуток матриць А і В, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Матриця A має розмір $[2\times 3],$ матриця B має розмір $[3\times 4],$ тобто матриці A і B узгоджені. Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці $B.$ Тоді матриця $C=A\cdot B$ буде мати розмір $[2\times 4].$

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 5 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 0 & 2\cdot 4+1\cdot(-2)+0\cdot(-1)\\ (-1)\cdot(-1)+3\cdot 0+4\cdot 5 & (-1)\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 1 & (-1)\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 0 & (-1)\cdot 4+3\cdot(-2)+4\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 5 & 4 & 6\\ 21 & 5 & 5 & -14\end{pmatrix}.$$

Властивості дії множення матриць:

1. $A(BC)=(AB)C$ – сполучний закон.
2. $(A+B)C=AC+BC$ – розподільний закон.
3. $A\cdot E=A.$

4. $A \cdot 0 = 0.$

5. $A \cdot B \neq B \cdot A.$

Якщо $A \cdot B = B \cdot A,$ то матриці називаються **комутативними.** Одинична матриця E коммутативна з будь-якою іншою, тобто $A \cdot E = E \cdot A = A$ і грає роль одиниці при множенні.

Ділення матриць $\frac{A}{B}$ розглядають як добуток $A \cdot B^{-1},$ де B^{-1} – матриця обернена до матриці $B.$

Приклад 6. Знайти значення матричного многочлена $f(A),$ якщо

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Зауважимо, що $f(A) = 2A^3 - A^2 + 3E,$ де $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Обчислимо $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$

Обчислимо $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-5) + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) \\ -3 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 & -3 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $f(A) = 2A^3 - A^2 + 3E = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -20 \\ 30 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вправи

1. Знайти суму матриць:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 11 \\ -3 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} -21 & 15 \\ 0 & 7 \\ 3 & -31 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -7 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $C=\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -7 & 10 \\ 1 & -27 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти різницю матриць:

1. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ 5 & 8 & -8 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ 4 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 10 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Записати матрицю, транспоновану до даної матриці:

1. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^T=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $B^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $C=\begin{pmatrix}-11 & 7\\ 4 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $C^T=\begin{pmatrix}-11 & 4 & -3\\ 7 & 6 & -3\end{pmatrix}.$

4. $D=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $D^T=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$

5. $E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}.$

Відповідь: $E^T=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\\ -4\end{pmatrix}.$

6. $F=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $F=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

4. Обчислити лінійну комбінацію $A-2B,$ якщо: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & -11\end{pmatrix}.$

5. Обчислити лінійну комбінацію $3A+2B,$ якщо: $A=\begin{pmatrix}-21 & 15\\ 0 & 7\\ 3 & -31\end{pmatrix}$ та

$B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -6 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}-61 & 35\\ -12 & 25\\ 7 & -89\end{pmatrix}.$

6. Обчислити лінійну комбінацію $2A-3B,$ якщо: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 6\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$ та

$B=\begin{pmatrix}-6 & 2 & 4\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}18 & -4 & 0\\ -2 & 7 & -15\end{pmatrix}.$

7. Обчислити лінійну комбінацію $2A-3B^T$, якщо: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 15 & -20\end{pmatrix}$.

8. Обчислити лінійну комбінацію $2A^T-3B$, якщо: $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}2 & 15\\ -1 & -20\end{pmatrix}$.

9. Обчислити лінійну комбінацію $3A+2B^T$, якщо: $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$ та

$B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}-9 & -8 & -9\\ 11 & 9 & -9\\ -1 & 18 & -8\end{pmatrix}$.

10. Обчислити лінійну комбінацію $3A-B^T$, якщо: $A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$ та

$B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Відповідь: $C=\begin{pmatrix}0 & -14 & 0\\ 8 & 18 & -9\\ 5 & 9 & -5\end{pmatrix}$.

11. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$f(x)=x^3-2x^2+2$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

12. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$f(x)=2x^3-3x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix}1 & 27\\ 0 & -26\end{pmatrix}$.

13. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x)=2x^3-x^2+2,\quad A=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. $f(A)=2A^3-A^2+2\cdot E.$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-12 & -20 & 15\\ 9 & 1 & -12\\ 9 & 8 & -9\end{pmatrix},\ -A^2=\begin{pmatrix}12 & 20 & -15\\ -9 & -1 & 12\\ -9 & -8 & 9\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-33 & 8 & 42\\ -18 & -79 & 12\\ 6 & -32 & -15\end{pmatrix},\ 2\cdot A^3=2\cdot\begin{pmatrix}-33 & 8 & 42\\ -18 & -79 & 12\\ 6 & -32 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-66 & 16 & 84\\ -36 & -158 & 24\\ 12 & -64 & -30\end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{тоді}\ 2\cdot E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$f(A)=2A^3-A^2+2=\begin{pmatrix}-66 & 16 & 84\\ -36 & -158 & 24\\ 12 & -64 & -30\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 20 & -15\\ -9 & -1 & 12\\ -9 & -8 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-52 & 36 & 69\\ -45 & -157 & 36\\ 3 & -72 & -19\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix}-52 & 36 & 69\\ -45 & -157 & 36\\ 3 & -72 & -19\end{pmatrix}.$

14. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x)=x^3-2x^2+2,\quad A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання. $f(A)=A^3-2A^2+2\cdot E.$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}17 & -6 & 11\\ -21 & 11 & -16\\ 12 & -3 & 7\end{pmatrix},\ -2A^2=-2\cdot\begin{pmatrix}17 & -6 & 11\\ -21 & 11 & -16\\ 12 & -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34 & 12 & -22\\ 42 & -22 & 32\\ -24 & 6 & -14\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-96 & 35 & -63\\ 133 & -54 & 91\\ -63 & 21 & -40\end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \text{тоді}\ 2\cdot E=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

$$f\left(A\right)=A^3-2A^2+2=\begin{pmatrix}-96&35&-63\\133&-54&91\\-63&21&-40\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-34&12&-22\\42&-22&32\\-24&6&-14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-128&47&-85\\175&-74&123\\-87&27&-52\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f\left(A\right)=\begin{pmatrix}-128&47&-85\\175&-74&123\\-87&27&-52\end{pmatrix}.$

15. Знайти добуток матриць:

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-3&-2\\-11&-10\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}4&1\\1&-2\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}-1&2\\1&3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-3&11\\-3&-4\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-1&2\\-5&2\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&-2\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix}2&4\\4&6\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}2&-4&1\\-1&2&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\2&-3&3\\-3&0&-1\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix}-17&14&-17\\-2&-7&5\\4&3&-1\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&-3\\2&-1&4\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 14 & -5 & -6 \\ -7 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \\ -20 & 5 & -11 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

Визначники. Обчислення визначників

Для довільної квадратної матриці порядку n можна встановити конкретну числову характеристику, яка носить назву **визначника (детермінанта) матриці.**

Визначник матриці позначають:

- вертикальними рисками;
- грецькою буквою Δ;
- виразом $\det A$.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

В залежності від розміру матриці визначники називають **визначниками деякого порядку.**

Визначником першого порядку, називають елемент a_{11}, тобто $\Delta = a_{11}$.

Визначником другого порядку, що відповідає матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, називається число $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

Визначник другого порядку записується так:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Тобто, щоб обчислити визначник другого порядку потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

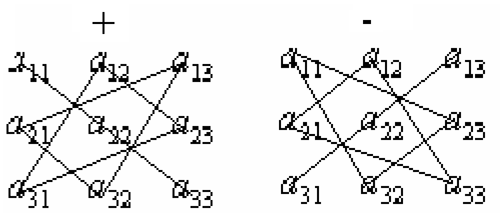
Приклад 1. Обчислити визначник матриці $A=\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

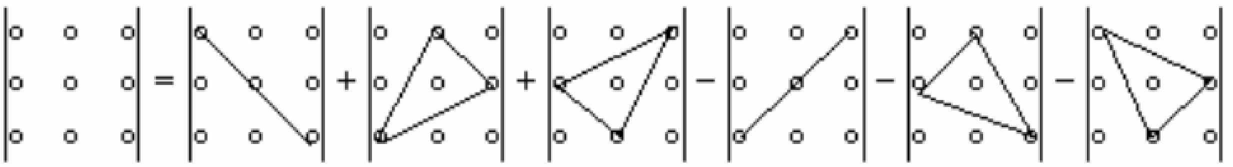
Розв’язання. $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\cdot 2-1\cdot(-8)=-6+8=2.$

Визначником третього порядку, який відповідає матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, називається число, яке обчислюється за формулою:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Формула обчислення на перший погляд складна, тому варто запам’ятати так зване **правило трикутників:** перші три додатних доданки є добутком елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Три від’ємні доданки є добутками елементів, що стоять на побічній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна побічній діагоналі.





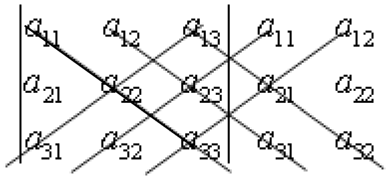
Приклад 2. Обчислити визначник матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot 2+(-2)\cdot 3\cdot 1+2\cdot(-4)\cdot 0-0\cdot(-3)\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 2-1\cdot 3\cdot(-4)=$$

$= -6 + (-6) + 0 - 0 - (-8) - (-12) = -6 - 6 + 8 + 12 = 8.$

При обчисленні визначників третього порядку зручно користуватися **правилом Саррусса (приписування стовпців):** до визначника приписують елементи першого і другого стовпців. Добутки елементів, що розміщені на головній діагоналі і на діагоналях їй паралельних, беруть зі знаком “плюс”. А добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і на діагоналях, їй паралельних, беруть зі знаком “мінус”.



$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$

Приклад 3. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання.

$$|A| = \left|\begin{matrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{matrix} = (-1)\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-3)\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot(-5) - 2\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot(-3)\cdot(-5) - 3\cdot 0\cdot 3 =$$

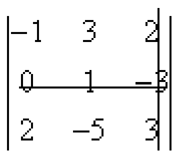
$$= -3 + (-18) + 0 - 4 - (-15) - 0 = -3 - 18 + 0 - 4 + 15 - 0 = -10.$$

Для обчислення визначників матриць більш високих порядків необхідно ввести поняття мінора.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називається визначник $(n-1)-$го порядку, який утворюється з даного викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця заданого визначника.

Приклад 4. Знайти мінор M_{23} визначника $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. Для елемента a_{23} мінором буде визначник, який утворений з визначника $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ викресленням другого рядка та третього стовпця, тобто



$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називається його мінор, взятий з знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Отже, алгебраїчне доповнення збігається з мінором, коли сума номерів та стовпців $(i+j)$ – парне число, та відрізняється від мінора, якщо $(i+j)$ – непарне число.

Приклад 5. Знайти $M_{12}, A_{12}, M_{31}, A_{31}$, якщо задано визначник третього порядку $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

Розв'язання. Для того, щоб обчислити M_{12} потрібно у заданому визначнику закреслити перший рядок і другий стовпець, тоді: $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6.$ Алгебраїчне доповнення маємо: $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 6 = -6.$

Знайдемо аналогічно M_{31}. Для цього викреслимо із даного визначника третій рядок і перший стовпчик, тоді $M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11.$ Відповідно $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot (-11) = -11.$

Важливе значення для обчислення визначників має теорема Лапласа.

Теорема Лапласа. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення.

Приклад 6. Обчислити визначник, розклавши його за довільним рядком (стовпцем), якщо

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Для обчислення даного визначника розкладемо його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-12 - 35) + (-4 - 7) + 4 \cdot (10 - 6) = -141 - 11 + 16 = -136.$$

Основні властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями (тобто транспонувати).
2. При перестановці двох рядків (або стовпців) визначник змінює знак на протилежний.
3. Якщо один з рядків (або стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.
4. Спільний множник рядка (або стовпця) можна виносити за знак визначника.
5. Визначник з двома однаковими рядками (або стовпцями) дорівнює нулю.

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (або стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо до якого не будь рядка (або стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне й те саме число, то визначник не змінить свого значення.

Приклад 7. Обчислити визначник четвертого порядку, використовуючи основні властивості визначників $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$

Розв’язання.

Додамо перший рядок до другого і четвертий, утворивши визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Переставимо місцями перший і третій стовпчики:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Додамо другий рядок до третього і четвертого, утворивши визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник 5 із третього і 3 із четвертого рядків:

$$\Delta = -5\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо третій рядок від четвертого, одержимо:

$$\Delta = -5\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -5\cdot 3\cdot (-1)\cdot 2\cdot 1\cdot (-3) - 90.$$

Вправи

1. Обчислити визначники матриць:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $\Delta = -1.$

2. $B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-6$.

3. $C=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-8$.

4. $D=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-3$.

5. $E=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-1$.

6. $F=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=3$.

7. $N=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=\cos^2 x$.

8. $N=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=\cos(\alpha+\beta)$.

2. Обчислити визначники матриць за допомогою:
   1) правила трикутників;
   2) правила приписування стовпців;
   3) правила розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця).

1. $$M=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

1) За правилом трикутників маємо:

$$|M|=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-3)\cdot(-1)+1\cdot3\cdot(-3)+2\cdot0\cdot(-2)-$$

$$-(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)-0\cdot3\cdot(-3)-2\cdot1\cdot(-1)=-9-9+0+18-0+2=2.$$

2) За правилом приписування стовпців одержимо:

$$|M|=\left|\begin{matrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{matrix}\right|\begin{matrix}-3 & 1\\ 2 & -3\\ -3 & 0\end{matrix}=(-3)\cdot(-3)\cdot(-1)+1\cdot3\cdot(-3)+(-2)\cdot2\cdot0-$$

$$-(-3)\cdot(-3)\cdot(-2)-0\cdot3\cdot(-3)-(-1)\cdot2\cdot1=-9-9+0+18-0+2=2.$$

3) Розкладемо визначник за третім рядком:

$$|M|=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-3)\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=(-3)\cdot(3-6)+(-1)\cdot(9-2)=9-7=2.$$

Відповідь: $\Delta=2$.

2. $N=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ -1 & 2 & 8\\ 0 & 7 & -6\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-119$.

3. $K=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-21$.

4. $L=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ -2 & -3 & 5\\ -1 & 0 & -6\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=59$.

5. $W=\begin{pmatrix}4 & 5 & -5\\ 1 & 0 & -3\\ 7 & 11 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-38$.

6. $L=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & 8 & 15\\ 1 & -3 & -6\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=15$.

7. $T=\begin{pmatrix}7 & 8 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=-9$.

8. $S=\begin{pmatrix}11 & 5 & 6\\ 1 & -2 & -3\\ 7 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=27$.

3. Знайти визначник матриці та $M_{12}, A_{12}, M_{31}, A_{31}$, якщо задано матрицю третього порядку $K=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -1\\ 3 & 5 & -3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=21$.

$M_{12}=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}=3,$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=17,\quad A_{31}=17.$$

4. Знайти визначник матриці та $M_{21}, A_{21}, M_{11}, A_{11}$, якщо задано матрицю третього порядку $M=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 3\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=2.$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{21}=1,$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=3,\quad A_{11}=3.$$

5. Знайти визначник матриці та $M_{22}, A_{22}, M_{12}, A_{12}$, якщо задано матрицю третього порядку $L=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ -2 & -3 & 5\\ -1 & 0 & -6\end{pmatrix}$.

Відповідь: $\Delta=59.$

$$M_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -6\end{vmatrix}=-14,\quad A_{22}=-14,$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & -6\end{vmatrix}=17,\quad A_{12}=-17.$$

Ранг матриці

Найвищий порядок мінору матриці, який не дорівнює нулю, називають **рангом матриці.**

Позначають ранг матриці A $rangA=1$ або $r(A)$.

Дві матриці називаються **еквівалентними,** якщо одна отримана з іншої з допомогою елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриць називають наступні операції:

1. Перестановка двох рядків або стовпців матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Домноження всіх елементів будь-якого рядка або стовпця на одне і те ж число, відмінне від нуля

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix} \text{ і } C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 25\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне й те ж число

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times 2\\ \\ \\ \end{matrix}\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right]+ \text{ і } D=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 5\\ 7 & -4 & 6\end{pmatrix}.$$

Теорема. Ранг матриці не зміниться, якщо над нею здійснити елементарні перетворення.

Приклад 1. Знайти ранг матриці:

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -6\end{pmatrix}$;

2. $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

Розв’язання.

1. Розглянемо матрицю $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -6\end{pmatrix}$. Матриця не має мінорів третього порядку, але має три мінори другого порядку, які рівні нулю

$$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}0 & -4\\ 0 & -6\end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & -6\end{vmatrix}=0.$$

Отже, ранг матриці A $rangA=1.$

2. Розглянемо матрицю $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 9 & 1\\ 1 & 3 & 11 & 14 & 3\end{pmatrix}$.

Ранг матриці $rangB\geq 1,$ оскільки є не нульові елементи.

Оскільки є визначник другого порядку, який не дорівнює нулю, тобто $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\neq 0,$ то $rangB\geq 2.$

Розглянемо всі визначники третього порядку, які включають у себе вказаний мінор:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 7\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 11\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 9\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 14\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Отже, $rangB=2.$

Якщо за допомогою елементарних перетворень зі звичайної матриці одержати східчасту, то кількість ненульових рядків визначать ранг матриці.

Приклад 2. Знайти ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & 0 & 2\\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3\\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0\\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

У матриці поміняємо місцями елементи першого і другого рядків:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Помножимо елементи першого рядка на 2 і додамо до третього, а також додамо елементи першого і четвертого рядків:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок помножимо на (-3) і додамо до третього та віднімемо елементи третього і четвертого рядків:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має сходчастий вигляд і містить мінори другого порядку, які не дорівнюють нулю, наприклад: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2 \neq 0,$ тобто ранг цієї матриці $r(A) = 2.$

Вправи

1. Обчислити ранг матриць:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(A) = 2.$

2. $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(B) = 2.$

3. $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(C) = 1.$

4. $D = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(D) = 2.$

5. $E = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(E) = 2.$

6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(F) = 1.$

7. $N=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(N)=3.$

8. $M=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(M)=3.$

9. $K=\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(K)=3.$

10. $L=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(L)=3.$

11. $Z=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -2 & 10 & -6 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(Z)=2.$

12. $V=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(V)=2.$

13. $Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(Q)=2.$

14. $W=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(W)=3.$

15. $R=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $rang(R)=2.$

Обернена матриця

Квадратна матриця називається **не виродженою,** якщо її визначник не дорівнює нулю $\left(|A| \neq 0\right)$ і **виродженою,** якщо її визначник дорівнює нулю $\left(|A| = 0\right)$.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці A, якщо виконуються рівності

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Теорема. Для того щоб квадратна матриця A мала обернену необхідно і достатньо, щоб матриця A була не вироджена, тобто щоб її визначник був відмінний від нуля.

Алгоритм знаходження оберненої матриці

1. Впевнитись, що матриця A квадратна.
2. Знайти визначник матриці A $\left(|A| \neq 0\right)$.
3. Знайти алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A і записати нову матрицю утворену з алгебраїчних доповнень елементів матриці A.
4. Поміняти місцями відповідні рядки і стовпці одержаної матриці (транспонувати матрицю).
5. Помножити одержану матрицю на $\dfrac{1}{|A|}$.

Обернена матриця, для квадратної третього порядку, знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{|A|} & \dfrac{A_{21}}{|A|} & \dfrac{A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{A_{12}}{|A|} & \dfrac{A_{22}}{|A|} & \dfrac{A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{A_{13}}{|A|} & \dfrac{A_{23}}{|A|} & \dfrac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. Маємо квадратну матрицю третього порядку.

Обчислимо визначник матриці:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9-8) - 5 \cdot (9-4) - 1 \cdot (6+3) =$$

$$= 2 \cdot (-17) - 5 \cdot 5 - 1 \cdot 9 = -34 - 25 - 9 = -68 \neq 0.$$

Отже, матриця не вироджена, тому має обернену.

Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17; \;\; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \;\; A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 17; \;\; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11; \;\; A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21.$$

Записуємо нову матрицю, яка утворена з алгебраїчних доповнень:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -17 & -5 & 9 \\ -17 & 7 & 1 \\ 17 & -11 & -21 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю $\tilde{A}$: $\tilde{A}_{ðð} = \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$

Помноживши матрицю $\tilde{A}_{тр}$ на $\frac{1}{|A|}$, знаходимо матрицю обернену до матриці A:

$$A^{-1} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix}.$$

Переконаємося в правильності наших обчислень. Знайдемо добуток матриці $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{68}\right) \cdot \begin{pmatrix} -17 & -17 & 17 \\ -5 & 7 & -11 \\ 9 & 1 & -21 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{68} \begin{pmatrix} 2\cdot(-17)+5\cdot(-5)-1\cdot 9 & 2\cdot(-17)+5\cdot 7-1\cdot 1 & 2\cdot 17+5\cdot(-11)-1\cdot(-21) \\ 3\cdot(-17)-3\cdot(-5)+4\cdot 9 & 3\cdot(-17)-3\cdot 7+4\cdot 1 & 3\cdot 17-3\cdot(-11)+4\cdot(-21) \\ 1\cdot(-17)+2\cdot(-5)+3\cdot 9 & 1\cdot(-17)+2\cdot 7+3\cdot 1 & 1\cdot 17+2\cdot(-11)+3\cdot(-21) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -34-25-9 & -34+35-1 & 34-55+21 \\ -51+15+36 & -51-21+4 & 51+33-84 \\ -17-10+27 & -17+14+3 & 17-22-63 \end{pmatrix} = -\frac{1}{68} \cdot \begin{pmatrix} -68 & 0 & 0 \\ 0 & -68 & 0 \\ 0 & 0 & -68 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Оскільки, $AA^{-1} = E$, то матриця A^{-1} обернена до матриці A.

Вправи

1. Знайти матрицю обернену до даної матриці:

1.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	**2.**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	**3.**	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	**4.**	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	**6.**	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	**7.**	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	**8.**	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	**10.**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	**11.**	$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	**12.**	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	**14.**	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**15.**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**16.**	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	**18.**	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	**19.**	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**20.**	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	**22.**	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**23.**	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	**24.**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	**26.**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	**27.**	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	**28.**	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	**30.**	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$				

Відповіді

1. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -74 \neq 0,$ тому обернена матриця існує.

Обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -22; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -26;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Запишемо обернену матрицю: $A^{-1} = -\frac{1}{74} \cdot \begin{pmatrix} -10 & -8 & 5 \\ -22 & 12 & -26 \\ 6 & -10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{37} & \frac{4}{37} & -\frac{5}{74} \\ \frac{11}{37} & -\frac{6}{37} & \frac{13}{37} \\ -\frac{3}{37} & \frac{5}{37} & \frac{3}{74} \end{pmatrix}.$

1.	$\begin{pmatrix} \frac{5}{37} & \frac{4}{37} & -\frac{5}{74} \\ \frac{11}{37} & -\frac{6}{37} & \frac{13}{37} \\ -\frac{3}{37} & \frac{5}{37} & \frac{3}{74} \end{pmatrix}$	**2.**	$\begin{pmatrix} -\frac{21}{62} & \frac{23}{31} & \frac{9}{62} \\ -\frac{5}{62} & \frac{4}{31} & \frac{11}{62} \\ \frac{7}{31} & -\frac{5}{31} & -\frac{3}{31} \end{pmatrix}$	**3.**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{55} & -\frac{7}{55} & \frac{13}{55} \\ \frac{27}{55} & \frac{31}{55} & -\frac{34}{55} \\ -\frac{8}{55} & \frac{1}{55} & \frac{6}{55} \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} \frac{2}{25} & \frac{3}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & -\frac{19}{25} \end{pmatrix}$	**5.**	$\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$	**6.**	$\begin{pmatrix} -\frac{7}{43} & -\frac{1}{43} & \frac{9}{43} \\ \frac{26}{43} & -\frac{27}{43} & -\frac{15}{43} \\ -\frac{11}{43} & \frac{23}{43} & \frac{8}{43} \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} \frac{5}{33} & \frac{5}{99} & \frac{4}{99} \\ \frac{1}{33} & -\frac{32}{99} & \frac{14}{99} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{2}{33} & \frac{5}{33} \end{pmatrix}$	**8.**	$\begin{pmatrix} \frac{41}{98} & -\frac{3}{98} & \frac{13}{98} \\ -\frac{3}{98} & \frac{5}{98} & \frac{11}{98} \\ -\frac{31}{98} & \frac{19}{98} & -\frac{17}{98} \end{pmatrix}$	**9.**	$\begin{pmatrix} -\frac{7}{55} & \frac{17}{55} & -\frac{2}{55} \\ \frac{28}{55} & -\frac{13}{55} & \frac{8}{55} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} \frac{10}{57} & \frac{29}{114} & -\frac{5}{38} \\ \frac{11}{57} & -\frac{4}{57} & \frac{2}{19} \\ -\frac{2}{57} & \frac{17}{114} & \frac{1}{38} \end{pmatrix}$	**11.**	$\begin{pmatrix} -\frac{3}{28} & \frac{13}{28} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -1 \end{pmatrix}$	**12.**	$\begin{pmatrix} -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{8}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{7}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{19}{22} \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} \frac{8}{57} & -\frac{1}{19} & -\frac{1}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{2}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{11}{57} & \frac{1}{19} & -\frac{18}{19} \end{pmatrix}$	**14.**	$\begin{pmatrix} \frac{7}{44} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{88} \\ \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{7}{44} & \frac{1}{11} & \frac{47}{88} \end{pmatrix}$	**15.**	$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{2}{21} & \frac{23}{21} \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} -\frac{4}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{13}{19} \\ \frac{11}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{12}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{6}{19} & -\frac{8}{19} \end{pmatrix}$	**17.**	$\begin{pmatrix} \frac{9}{17} & \frac{5}{17} & -\frac{1}{17} \\ \frac{14}{51} & \frac{7}{17} & \frac{2}{17} \\ -\frac{10}{51} & -\frac{5}{17} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$	**18.**	$\begin{pmatrix} \frac{13}{25} & \frac{3}{25} & -\frac{14}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{25} & \frac{1}{25} & \frac{12}{25} \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} \frac{2}{65} & -\frac{8}{65} & \frac{5}{13} \\ \frac{17}{65} & -\frac{3}{65} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{3}{65} & \frac{12}{65} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$	**20.**	$\begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{7}{17} & -\frac{8}{17} \\ -\frac{2}{17} & \frac{13}{17} & \frac{10}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{11}{17} & -\frac{15}{17} \end{pmatrix}$	**21.**	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

22.	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{32} \\ \frac{1}{24} & \frac{7}{24} & -\frac{11}{48} \\ \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{7}{32} \end{pmatrix}$	**23.**	$\begin{pmatrix} -\frac{8}{59} & -\frac{11}{59} & \frac{12}{59} \\ -\frac{2}{59} & \frac{12}{59} & \frac{3}{59} \\ \frac{29}{59} & \frac{3}{59} & -\frac{14}{59} \end{pmatrix}$	**24.**	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{35} & \frac{13}{35} & -\frac{6}{35} \\ -\frac{9}{35} & \frac{6}{35} & \frac{8}{35} \\ \frac{12}{35} & -\frac{8}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0 \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{11} & \frac{3}{11} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	**26.**	$\begin{pmatrix} \frac{2}{85} & \frac{2}{17} & -\frac{21}{85} \\ -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} & \frac{6}{17} \\ \frac{16}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{2}{85} \end{pmatrix}$	**27.**	$\begin{pmatrix} \frac{7}{40} & \frac{3}{10} & -\frac{9}{40} \\ \frac{11}{80} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{80} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} \frac{14}{31} & -\frac{29}{31} & \frac{11}{31} \\ -\frac{11}{31} & \frac{25}{31} & -\frac{2}{31} \\ -\frac{2}{31} & \frac{13}{31} & -\frac{6}{31} \end{pmatrix}$	**29.**	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{2} & -\frac{6}{7} \\ \frac{1}{14} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$	**30.**	$\begin{pmatrix} \frac{4}{53} & \frac{15}{53} & -\frac{14}{53} \\ -\frac{9}{53} & \frac{6}{53} & \frac{5}{53} \\ \frac{12}{53} & -\frac{8}{53} & \frac{11}{53} \end{pmatrix}$