Послідовність. Границя послідовності

Послідовністю називається функція f визначена на множині N для всіх натуральних чисел. Якщо $f(n) = x_n$, при $n \in N$, то прийнято позначати послідовність f символом $\{x_n\}$ або записувати $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Значення функції f, тобто елементи x_n називаються **членами послідовності**. Відмітимо, що члени послідовності $x_1, x_2, x_3, \ldots$ не обов'язково повинні бути різними.

Згідно означення послідовність містить **нескінченну** кількість членів.

Приклад 1. Обчисліть чотири перших члени послідовності $x_n = \frac{n-1}{n+1}$.

Розв'язання.

Випишемо чотири перших членів цієї послідовності:

$$x_1 = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$x_2 = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3};$$

$$x_3 = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$x_4 = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається **збіжною,** якщо існує таке число a, що для будь якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число N, що для всіх членів послідовності з номерами $n \geq N$ буде виконуватись нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

В цьому випадку ми будемо говорити, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a, або, a **є границею послідовності** $\{x_n\}$ і будемо записувати $x_n \to a$, або

$$\lim_{x \to x_0} x_n = a.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою,** якщо існує таке додатне число M, що виконується нерівність $|x_n| \leq M$ при всіх n.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **монотонно зростаючою (спадною),** якщо $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо існує число m, таке, що при всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ виконується нерівність $x_n \geq m$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою зверху**, якщо існує число m, таке, що при всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$ виконується нерівність $x_n \leq m$.

Послідовність $\{x_n\}$ не обмежена зверху або знизу, називається **необмеженою.**

Послідовність $\{x_n\}$, що має границю, називається **збіжною**, а яка не має границі, називається **розбіжною.**

Властивості збіжних послідовностей

Якщо $\lim_{n \to \infty} p_n = p$, а $\lim_{n \to \infty} q_n = q$, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n+q_n)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n+\lim\limits_{n\to\infty}q_n=p+q;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot p_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}p_n;\quad \lim\limits_{n\to\infty}(c+p_n)=c+\lim\limits_{n\to\infty}p_n=c+p$ для будь-якого числа c;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n\cdot q_n)=\lim\limits_{n\to\infty}p_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}q_n=p\cdot q;$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}p_n}{\lim\limits_{n\to\infty}q_n}=\dfrac{p}{q}$, при умові $q_n\neq 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ і $q\neq 0$;
5. Якщо $p_n\le q_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}p_n\le\lim\limits_{n\to\infty}q_n$;

Якщо $a_n\le b_n\le c_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L,$ $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L.$

Теорема. Монотонна послідовність збігається тоді і тільки тоді коли вона обмежена.

Нехай послідовність дійсних чисел $\{p_n\}$ володіє наступною властивістю: для будь-якого дійсного M існує ціле число N, таке, що при $n\ge N$ ми маємо $p_n\ge M$. Тоді ми записуємо

$$\lim_{n\to\infty}p_n=+\infty.$$

Аналогічно, якщо для будь-якого дійсного числа M існує ціле число N, таке, що при $n\ge N$ ми маємо $p_n\le M$, то ми пишемо

$$\lim_{n\to\infty}p_n=-\infty.$$

Приклад 2. Обчислити границі послідовностей: 1) $\left\{\dfrac{3n^2-2n+1}{15n^2+9n-2}\right\}$;

2) $\left\{\dfrac{1-n}{n^2+n+1}\right\}$; c) $\left\{\sqrt{n^2+2n}-n\right\}$.

Розв’язання.

1. Поділимо чисельник і знаменник виразу на найбільший степінь n знаменника, тобто на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{15n^2+9n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{15+\frac{9}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{3-0+0}{15+0-0}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$ оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

Послідовність збіжна і її границя дорівнює $\dfrac{1}{5}$.

2. Поділимо чисельник і знаменник виразу на найбільший степінь n знаменника, тобто на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0-0}=0.$$

Послідовність збігається до нуля.

3. В цій послідовності помножимо чисельник і знаменник (який дорівнює одиниці) на вираз спряжений до чисельника:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=$$

$$=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1.$$

Послідовність збігається до 1.

Наведемо приклади деяких спеціальних послідовностей, які широко застосовуються при розв'язуванні вправ.

1). Якщо $p>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$.

2). Якщо $p>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$.

3). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

4). Якщо $p>0$ і α - дійсне число, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}=0$.

5). Якщо $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$.

Розв'язання.

Поділимо чисельник і знаменник виразу для a_n на 3^n і використаємо послідовність (5):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=1.$$

Послідовність збіжна, її границя дорівнює 1.

Вправи

1. Запишіть перших п'ять членів таких послідовностей:
   1. $x_n=2n+5;$
   2. $x_n=\frac{1}{2n-1};$
   3. $x_n=\frac{(-1)^n}{n};$
   4. $x_n=4;$
   5. $x_n=\frac{3}{(-1)^n};$
   6. $x_n=2n;$
   7. $x_n=4n^2+3n+1;$
   8. $x_n=\frac{1}{2^n}+2^n.$

2. Обчислити границі таких послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}5\cdot\frac{n+1}{n}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^2-4n+1}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n}{n^2+n+1}$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$.