Границя і неперервність функції

Число A називається **границею** функції $f(x)$ у точці a (або при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ і позначають так: $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Функції, які мають границі, володіють наступними властивостями.

1. Якщо функція $y=f(x)$ при $x\to x_0$ має границю, то ця границя єдина.
2. Якщо функція $y=f(x)$ при $x\to x_0$ має скінчену границю, то існує такий окіл точки x_0 в якому ця функція обмежена.

Основні теореми про границю

1. Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.

$$\lim_{x\to a} C = C$$

2. Границя суми (різниці) двох функції дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x).$$

3. Границя добутку двох функції дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

4. Постійний множник можна винести за знак границі.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

5. Границя частки двох функції дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},\ \text{де}\ \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

6. Деякі важливі границі:

$$1.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad 2.\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1;\quad 3.\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$

$$4.\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1;\quad 5.\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e;\quad 6.\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;$$

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\quad 8.\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad 9.\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Число B називається границею функції $y=f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ можна вказати таке число $K>0$, що для всіх x, які задовольняють умову $|x|>K$ виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$ і записують

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=B.$$

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі (a,b).

Число B називається **правосторонньою границею** функції $f(x)$ в точці a, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_n,\ n\in N$, такої $x_n>a$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, послідовність відповідних значень функції $f(x_n),\ n\in N$, збігається до B і записують $\lim\limits_{x\to a_+}f(x)=B.$

Число C називається **лівосторонньою границею** функції $f(x)$ в точці b, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_n,\ n\in N$, такої, що $x_n<b$ і $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$, послідовність відповідних значень функції $f(x_n),\ n\in N$, збігається до C і записують $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=C.$

Приклад 1. Обчислити границі функцій:

$$a)\lim_{x\to-2}\left(x^3-2x+4\right);$$

$$b)\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x}{x^2+1};$$

$$c)\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1};$$

$$d)\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6};$$

$$e)\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2};$$

$$f)\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16};$$

$$g)\lim_{x\to2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}.$$

Розв'язання.

a) Область визначення функції $y=x^3-2x+4$ є множина всіх дійсних чисел, тому

$$\lim_{x\to-2}\left(x^3-2x+4\right)=(-2)^3-2\cdot(-2)+4=-8+4+4=0.$$

b) Функція $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}$ – дробово-раціональна функція і $x=-1$ належить її області визначення (знаменник не перетворюється в нуль при $x=-1$). Тому ми знаходимо границю, виконавши пряму підстановку:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-2x}{x^2+1}=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

c) Нехай $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. Ми не можемо виконати підстановку $x=1$, оскільки $x=1$ не належить $D(y)$. Розклавши на множники знаменник і скоротивши, одержуємо $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=1+1=2$.

d) При безпосередні підстановці $x=2$ маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

Розкладемо на множники чисельник і знаменник, використавши формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 та x_2 корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, і проведемо скорочення дробу:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{2x+3}=\frac{3\cdot 2+1}{2\cdot 2+3}=$$

$$=\frac{6+1}{4+3}=\frac{7}{7}=1.$$

e) Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Використаємо тотожність $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ та границю $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

f) При $x=4$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Помножимо чисельник і знаменник на вираз спряжений до чисельника:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=$$

$$=\frac{1}{(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{1}{8\cdot 4}=\frac{1}{32}.$$

g) При $x\to 2$ основа $3x-5$ прямує до одиниці, а показник степеня $\frac{4}{x-2}$ прямує до нескінченності. Зробимо заміну $3x-5=1+\alpha$, $\alpha\to 0$ при $x\to 2$. Тоді $3x=6+\alpha$; $x=2+\frac{\alpha}{3}$ і $x-2=\frac{\alpha}{3}$. Виразивши основу і показник степеня через α та використавши границю $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$, одержимо:

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{12/\alpha}=\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right)^{12}=e^{12}.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim_{x\to 2+}\frac{x-3}{x^2-4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=-\infty.$$

Приклад 3. Обчислити $\lim_{x\to 2-}\frac{x-3}{x^2-4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}=\infty.$$

Приклад 5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-4}$.

Розв’язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$$ не існує.

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{4x^2+2}$.

Розв’язання.

Ділимо чисельник і знаменник на x^2, найбільший степінь x в знаменнику:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3x+5}{4x^2+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{4+\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0+0}{4+0}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x+5}{4x^3+2}$.

Розв’язання.

Ділимо чисельник і знаменник на x^3, найбільший степінь x в знаменнику:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+5}{4x^3+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{4+\frac{2}{x^3}}=\frac{-0+0}{4+0}=0.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+25}{4x^2-22}$.

Розв’язання.

Ділимо чисельник і знаменник на x^2, найбільший степінь x в знаменнику:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+25}{4x^2-22}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\frac{25}{x^2}}{4-\frac{22}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x+\frac{25}{x^2}\right)}{4}=\frac{\infty}{4}=\infty.$$

Нескінченно малі і нескінченно великі

Функція $y=f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x\to+\infty$, якщо її границя при $x\to+\infty$ дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

Аналогічно дається означення нескінченно малої функції при $x\to-\infty$, $x\to x_{0-}$, $x\to x_{0+}$, $x\to x_0$.

Властивості нескінченно малих

1. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.
2. Добуток нескінченно малої функції (при $x\to+\infty$) на функцію обмежену (при $x\to+\infty$) є функцією нескінченно малою.
3. Добуток двох нескінченно малих функцій є функція нескінченно мала.

4. Добуток нескінченно малої функції на число є функція нескінченно мала.
5. Частка від ділення функції $f(x)$, нескінченно малої при $x \to +\infty$ на функцію $\phi(x)$, границя якої (при $x \to +\infty$) відмінна від нуля, є функцією нескінченно малою.

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to +\infty$, якщо для будь-якого додатного числа K можна підібрати таке число N, що для всіх значень $x > N$ виконується нерівність $|f(x)| > K$.

Будь-який многочлен є функція нескінченно велика.

Між нескінченно малими та нескінченно великими існує тісний зв'язок, який встановлюється наступними теоремами:

1. Якщо функції $f(x)$ є нескінченно великою при $x \to +\infty$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є функцією нескінченно малою при $x \to +\infty$.
2. Якщо функції $f(x)$, не перетворюючись в нуль, є нескінченно мала при $x \to +\infty$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ є функція нескінченно велика при $x \to +\infty$.

Функція називається **неперервною** в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.

Отже, функція $y = f(x)$ в точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0;
2) для функції існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо хоч одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається **точкою розриву**.

Якщо в точці x_0 функція неперервна, то ця точка називається **точкою неперервності** функції.

Функція називається **неперервною на інтервалі** (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0. Якщо $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = f(x_0)$, то говорять, що функція $y = f(x)$ **неперервна** в точці x_0 **справа,** якщо $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x) = f(x_0)$, то функція називається **неперервною** в точці x_0 **зліва.**

Точки розриву функції поділяють на два види.

Точка розриву x_0 функції $f(x)$ називається **точкою розриву I роду,** якщо існують обидві односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_{0-}} f(x)$.

Точка розриву x_0 називається **точкою розриву II роду,** якщо вона не є точкою розриву I роду.

Властивості функцій неперервних в точці

Теорема 1. *Якщо функції* $y=f(x)$ *і* $y=g(x)$ *є неперервними в точці* x_0, *то в цій точці будуть неперервними й функції* $y=f(x)\pm g(x)$ *та* $y=f(x)\cdot g(x)$.

Теорема 2. *Якщо функції* $y=f(x)$ *і* $y=g(x)$ *є неперервними в точці* x_0 *і* $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, *то в цій точці буде неперервною й функція* $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Виходячи з теорем 1 і 2, можна стверджувати, що:

1) Многочлен $y=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ – неперервна функція в будь-якій точці $x_0\in R$.
2) Дробово-раціональна функція $y=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n}$ неперервна в усіх точках числової осі, крім тих точок, у яких знаменник дорівнює нулю.
3) Функції $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg}x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\sqrt[n]{x}$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arcctg}x$, $y=|x|$ є також неперервними в усіх точках області визначення.

Властивості функцій неперервних на відрізку

Функція називається **неперервною на відрізку** $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b), неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найменшого і найбільшого значення. При цьому вона набуває всі значення між найменшим і найбільшим значеннями.
2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і на його кінцях набирає значення різних знаків, то в середині відрізку $[a;b]$, знайдеться хоча б одна точка, в якій значення функції дорівнює нулю.
3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, і $f(a)=K$, а $f(b)=L$, тоді для будь-якого числа M, яке міститься між числами K і L, знайдеться, в середині цього відрізка, принаймні одна точка m в якій значення функції дорівнює M:
$$f(m)=M.$$

Вправи

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+3\right)$.
2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+4\right)$.
3) $\lim\limits_{x\to -2}\left(2x^2-3x+6\right)$.
4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3+x^2-x+1\right)$.

5) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-4x+1\right).$ 6) $\lim\limits_{x\to -2}\left(2x^2-5x+1\right).$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left((2x-1)(3+2x)(x-5)\right).$ 8) $\lim\limits_{x\to -1}\left((3x-1)(3-x)(x+5)\right).$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\left((2x-1)(3+2x)(x-5)\right).$ 10) $\lim\limits_{x\to -1}\left((3x+2)(3-2x)(2x-5)\right).$

11) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}.$ 12) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+3x-4}{x-3}.$

13) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}.$ 14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}.$

15) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{x-11}.$ 16) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2-36}{x+6}.$

17) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8x+16}{x-4}.$ 18) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x+3}.$

19) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+10x+25}{x+5}.$ 20) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-12x+36}{x-6}.$

21) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}.$ 22) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}.$

23) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}.$ 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}.$

25) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}.$ 26) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}.$

27) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}.$ 28) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}.$

29) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}.$ 30) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}.$

31) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}.$ 32) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}.$

33) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{5-\sqrt{x}}{25-x}.$ 34) $\lim\limits_{x\to 36}\dfrac{6-\sqrt{x}}{36-x}.$

35) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{2-\sqrt{x-3}}.$ 36) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}.$

37) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}.$ 38) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{3x}.$ 40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}.$

41) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}.$ 42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}.$

43) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}.$ 44) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}.$

45) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}.$ 46) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x^2+3}{3x^3-5}.$

2. У яких точках функція має розрив?

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}.$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}.$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}.$

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x-3}.$

3. Довести, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 :

1) $f(x)=3x-1,\quad x_0=2;$

2) $f(x)=4-0,5x,\quad x_0=4;$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<4, \\ 3x, & x\ge 4, \end{cases}\qquad x_0=4.$

4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\ne 3, \\ 6, & x=3, \end{cases}\qquad x_0=3.$