Числові функції

1. Поняття функції. Графік функції.

Функцією називають таку відповідність між змінними x та y, при якій кожному значенні змінної x відповідає єдине значення змінної y. при цьому змінну x називають незалежною змінною, або аргументом, а змінну y – залежною змінною, або функцією (від аргументу x).

Функції можна задати за допомогою таблиць, формул, графіків.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати - відповідним значенням функції.

2. Область визначення функції.

Множину всіх значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають **областю визначення** функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Якщо вираз $f(x)$ є многочленом, то областю визначення функції $y=f(x)$ є множина всіх дійсних чисел; якщо $f(x)$ – раціональний дріб, то областю визначення є множина всіх дійсних чисел, крім тих значень x, при яких знаменник дробу дорівнює нулю; якщо функція задана формулою $y=\sqrt{g(x)}$, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність $g(x)\ge 0$.

3. Область значень функції.

Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають **областю значення** функції і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

4. Нулі функції.

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, називають **нулями** функції. Щоб знайти нулі функції $y=f(x)$, потрібно розв’язати рівняння $f(x)=0$.

5. Парні та непарні функції.

Функція $y=f(x)$ називається **парною**, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ теж належить області визначення і виконується рівність $f(-x)=f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy. Тому для побудови графіка функції досить побудувати частину графіка для $x\ge 0$, а потім, виконавши симетрію цієї частини відносно осі Oy, одержимо частину графіка для $x\le 0$.

Функція $y=f(x)$ називається **непарною**, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ теж належить області визначення і виконується рівність $f(-x)=-f(x)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Тому для побудови графіка функції досить побудувати частину графіка для

$x \geq 0,$ а потім, виконавши симетрію цієї частини відносно початку координат, одержимо частину графіка для $x \leq 0.$

При дослідженні функції $y = f(x)$ на парність чи непарність потрібно перш за все знайти область визначення функції і встановити, чи симетрична вона відносно початку координат. Якщо симетрична, то порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$. Якщо область визначення несиметрична відносно початку координат, то функція ні парна, ні непарна.

6. Зростання, спадання функції.

Функція f визначена на інтервалі $(a;b)$ називається **зростаючою** на цьому інтервалі, якщо для довільних значень аргументу x_1 і x_2 з цього інтервалу, з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція f визначена на інтервалі $(a;b)$ називається **неспадною** на цьому інтервалі, якщо для довільних значень аргументу x_1 і x_2 з цього інтервалу, з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функція f визначена на інтервалі $(a;b)$ називається **спадною** на цьому інтервалі, якщо для довільних значень аргументу x_1 і x_2 з цього інтервалу, з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція f визначена на інтервалі $(a;b)$ називається **незростаючою** на цьому інтервалі, якщо для довільних значень аргументу x_1 і x_2 з цього інтервалу, з нерівності $x_1 < x_2$ слідує нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Зростаючі, неспадні, спадні, незростаючі на інтервалі $(a;b)$ функції називаються **монотонними** функціями на цьому інтервалі.

Зростаючі і спадні на інтервалі $(a;b)$ функції називаються **строго монотонними** на цьому інтервалі.

7. Обернена функція.

Поняття оберненої функції може бути застосоване тільки до функцій, що мають таку властивість: кожному значенню y з області значень функції відповідає єдине значення x з області визначення цієї функції.

8. Періодичність функції.

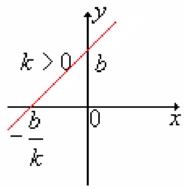
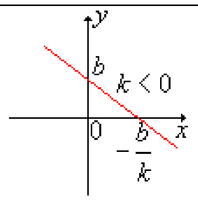
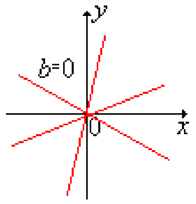
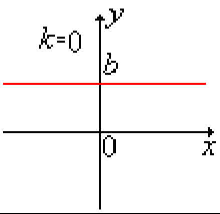
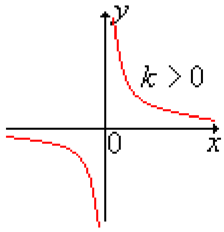
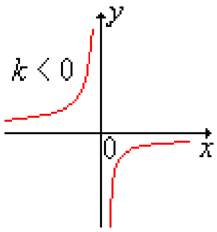
Функція $y = f(x)$ називається **періодичною,** якщо існує таке число $T \neq 0$, що $x \pm T \in D(y)$ і $f(x \pm T) = f(x)$ для всіх x з області визначення функції.

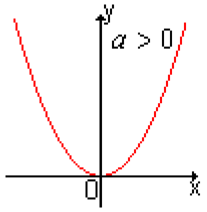
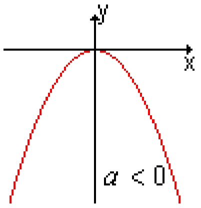
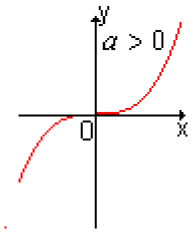
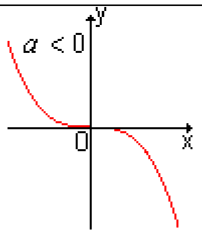
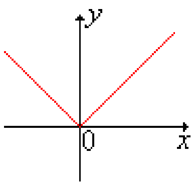
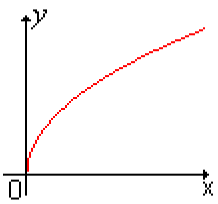
Тригонометричні функції $y = \sin x;$ $y = \cos x;$ $y = \mathrm{tg}x;$ $y = \mathrm{ctg}x$ є періодичними функціями. Найменший додатній період функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ дорівнює 2π, функцій $y = \mathrm{tg}x$ та $y = \mathrm{ctg}x$ – дорівнює π.

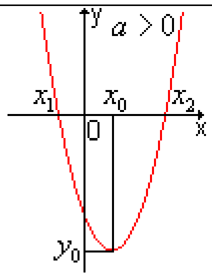
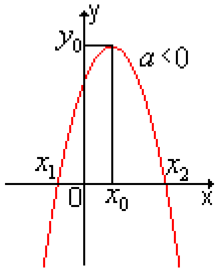
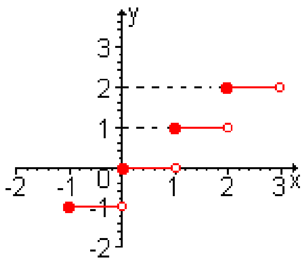
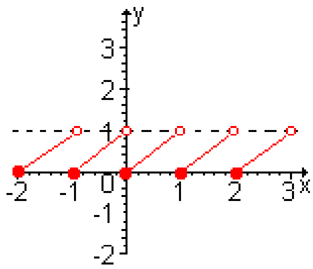
Огляд властивостей основних функцій:

$$y=kx+b,\ y=\frac{k}{x},\ y=ax^2,\ y=ax^3,\ y=|x|,\ y=\sqrt{x},\ y=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0),$$

$$y=[x],\ y=\{x\}.$$

Графік функції	$D(y)$	$E(y)$	Парність, непарність	Зростання, спадання
Лінійна функція $y=kx+b$				
	R	R	ні парна, ні непарна	зростає на R
				спадає на R
	R	R	непарна	зростає при $k>0$, спадає при $k<0$.
	R	b	парна	постійна
Обернена пропорційність $y=\frac{k}{x}$				
	$x\neq 0$	$x\neq 0$	непарна	спадає на проміжках $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
	$x\neq 0$	$x\neq 0$	непарна	спадає на проміжках $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
$y=ax^2$				

<table>
<tr><td>
</td><td rowspan="2">R</td><td>$[0;\infty)$</td><td rowspan="2">парна</td><td>зростає, якщо $x\in[0;\infty)$; спадає, якщо $x\in(-\infty;0]$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(-\infty;0]$</td><td>зростає, якщо $x\in(-\infty;0]$. спадає, якщо $x\in[0;\infty)$;</td></tr>
<tr><td colspan="5">$y=ax^3$</td></tr>
<tr><td>
</td><td rowspan="2">R</td><td rowspan="2">R</td><td rowspan="2">непарна</td><td>зростає, якщо $x\in R$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>спадає, якщо $x\in R$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$y=|x|$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>R</td><td>$[0;\infty)$</td><td>парна</td><td>Спадає, якщо $x\in(-\infty;0]$; зростає, якщо $x\in[0;\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$y=\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$[0;\infty)$</td><td>$[0;\infty)$</td><td>ні парна, ні непарна</td><td>зростає, якщо $x\in[0;\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$</td></tr>
</table>

	R	$[y_0;\infty)$	Парна, якщо $x_0=0$	зростає, якщо $x\in[x_0;\infty)$; спадає, якщо $x\in(-\infty;x_0]$
		$(-\infty;y_0]$		зростає, якщо $x\in(-\infty;x_0]$; спадає, якщо $x\in[x_0;\infty)$
$y=[x]$				
	R	Z	ні парна, ні непарна	постійна для $x\in[n;n+1)$, де $n\in Z$
$y=\{x\}$				
	R	$[0;1)$	ні парна, ні непарна	Зростає на кожному із проміжків

Вправи

1. Побудуйте графіки функцій:

а) $y=3x-2;$

б) $y=-0,6x;$

в) $y=\dfrac{2}{3}x+1;$

г) $y=\dfrac{1-3x}{3};$

д) $y=-2x+3;$

е) $y=0,8x;$

ж) $y=\dfrac{3}{4}x+1;$

з) $y=\frac{1-2x}{4}$.

2. Чи проходить графік функції $y=2x-1$ через точку:

а) $A(3;5)$;

б) $B(-10;-5)$;

в) $C(100;199)$.

3. Графіком функції є пряма, яка проходить через точки $A(0;2)$ і $B(3;0)$. Задайте цю функцію формулою.

4. Побудуйте графіки функцій:

а) $y=\frac{10}{x}$;

б) $y=-\frac{10}{x}$;

в) $y=\frac{8}{x}$;

г) $y=-\frac{8}{x}$.

5. Розв'яжіть рівняння графічно:

а) $\frac{10}{x}=5-x$;

б) $x^2-\frac{1}{x}=0$;

в) $\sqrt{x}+2=x$;

г) $\sqrt{x}-\frac{1}{x}=0$;

д) $\frac{12}{x}=7-x$;

е) $x^2+\frac{8}{x}=0$;

ж) $x+\sqrt{x}=6$;

з) $x^2-\sqrt{x}=0$.

6. Побудуйте графіки функцій:

а) $y=x^2-4x+3$;

б) $y=4x-x^2$;

в) $y=x^2-x-6$;

г) $y=-x^2-6x-9$.

7. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{6}{x-1}$;

2) $y=\frac{1}{x+5}$;

3) $y=\frac{2}{x^2-x}$;

4) $y=\dfrac{3}{x^2-4}$;

5) $y=\sqrt{2x-4}$;

6) $y=\sqrt{9-x}$;

7) $y=\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-3}}$;

8) $y=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$;

9) $y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-5}$;

10) $y=\dfrac{3x}{x^2-5x+6}$;

11) $y=\dfrac{1}{x-3}$;

12) $y=\dfrac{2}{7-x}$;

13) $y=\dfrac{2}{x^2+x}$;

14) $y=\dfrac{3}{x^2-9}$;

15) $y=\sqrt{3x-6}$;

16) $y=\sqrt{8-x}$;

17) $y=\sqrt{\dfrac{x+6}{2x+1}}$;

18) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{3+x}$;

19) $y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x+3}$;

20) $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{x^2-5x+6}$.

8. Знайдіть область значення функції:

1) $y=-x^2-4x+2$;

2) $y=1-3\sqrt{x}$;

3) $y=x^2-2x-5$;

4) $y=2\sqrt{x}+3$.

9. Знайдіть проміжки зростання (спадання) функції та проміжки знакосталості:

1) $y=-2x+2$;

2) $y=x^2-2x-3$;

3) $y=3x-1$;

4) $y=x^2-6x+8$.

10. Знайти нулі функції:

1) $y=12-3x$;

2) $y=x^2-6x+5$;

3) $y = 5x + 2;$

4) $y = 2x^2 - 4x.$

11. Дослідіть функцію на парність; непарність.

1) $y = 2 + 5x;$

2) $y = x^2 - 4x;$

3) $y = x^3 + 3x;$

4) $y = x^4 - 2;$

5) $y = \dfrac{x}{x+1};$

6) $y = x^4 - 2x^2;$

7) $y = \dfrac{2}{x};$

8) $y = 1 + \sqrt{x};$

9) $y = 12 - 3x;$

10) $y = x^2 - 6x + 5;$

11) $y = x^3 - 5x;$

12) $y = x^6 - 2;$

13) $y = \dfrac{2x}{x-5};$

14) $y = x^6 - 2x^2;$

15) $y = -\dfrac{2}{x};$

16) $y = 1 - 3\sqrt{x}.$

12. Задайте формулами елементарні функції f і g, з яких складається складена функція $h(x) = g\left(f(x)\right).$

1) $h(x) = (3 - 5x)^5;$

2) $h(x) = \sqrt{2x^2 - 3x};$

3) $h(x) = \sin 5x.$

13. Побудуйте графік функції. Користуючись графіком, вкажіть:

а) область значень функції;

б) проміжки, на яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень;

в) проміжки, на яких функція зростає, спадає;

г) парна чи непарна функція.

1) $y = -x^2 + 4x - 3;$

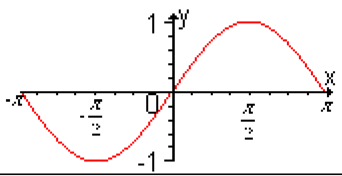
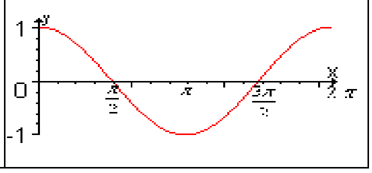
2) $y = \begin{cases} 2 - x, \text{ якщо } -2 \le x < 0; \\ 2 + x, \text{ якщо } \quad 0 \le x < 2; \end{cases}$

3) $y = \dfrac{1}{x-2};$

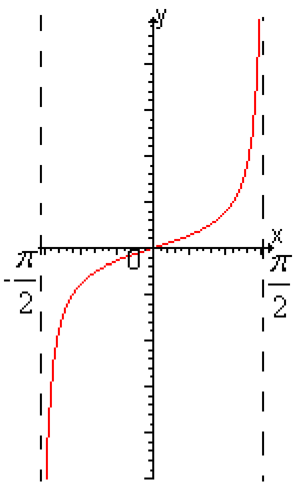
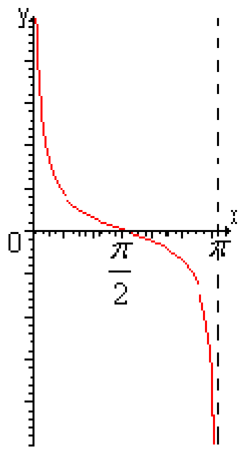
4) $y = \sqrt{-x} - 1;$

5) $y = x^2 - 2x - 3;$

Властивості та графіки тригонометричних функцій

№	Властивості	Функція	
		$y=\sin x$	$y=\cos x$
1.	Область визначення	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;\infty)$
2.	Область значень	$[-1;1]$	$[-1;1]$
3.	Парність, непарність	непарна	парна
4.	Основний період	2π	2π
5.	Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
6.	Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$(2\pi k;\pi+2\pi k)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$
7.	Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень	$(-\pi+2\pi k;2\pi k)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$
8.	Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$	$[-\pi+2\pi k;2\pi k]$
9.	Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$	$[2\pi k;\pi+2\pi k]$
10.	Найбільше значення функції	1	1
11.	Значення аргументу, при якому функція набуває найбільшого значення	$\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$2\pi k$
12.	Найменше значення функції	-1	-1
13.	Значення аргументу, при якому функція набуває найменшого значення	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\pi+2\pi k$
14.	Графік функції		

№	Властивості	Функція	
		ó = tg*x*	ó = ctg*x*
1.	Область визначення	Множина всіх дійсних чисел, крім $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$	Множина всіх дійсних чисел, крім $x=\pi k$
2.	Область значень	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;\infty)$
3.	Парність, непарність	непарна	непарна
4.	Основний період	π	π

5.	Нулі функції	πk	$\frac{\pi}{2}+\pi k$
6.	Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	$\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$
7.	Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k\right)$
8.	Проміжки зростання	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	–
9.	Проміжки спадання	–	$(\pi k; \pi+\pi k)$
10.	Найбільше значення функції	–	–
12.	Найменше значення функції	–	–
14.	Графік функції		

Приклад 1. Знайти нулі функції $y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Враховуючи, що нулями синуса є числа виду πk, де $k \in Z$, матимемо:
$3x+\frac{\pi}{6}=\pi k;\quad 3x=-\frac{\pi}{6}+\pi k;\quad x=-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{3};\quad k \in Z.$

Приклад 2. Знайти проміжки, на яких функція $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ набуває додатних значень.

Косинус набуває додатних значень на проміжках $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, де $k \in Z$. Знайдемо значення x, для яких значення виразу $2x-\frac{\pi}{4}$ належать цим проміжкам:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k < 2x-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+2\pi k;$$
$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi k<2x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{8}+\pi k<x<\frac{3\pi}{8}+\pi k.$$

Отже, дана функція набуває додатних значень на проміжках $\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k;\frac{3\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

Приклад 3. Що більше $\sin\frac{\pi}{8}$ чи $\sin\frac{\pi}{9}$?

Числа $\frac{\pi}{8}$ та $\frac{\pi}{9}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, на якому синус зростає. Оскільки $\frac{\pi}{8}>\frac{\pi}{9}$, то $\sin\frac{\pi}{8}>\sin\frac{\pi}{9}$.

Приклад 4. Знайти значення x, при яких функція $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває найменшого значення.

Найменшого значення -1 синус набуває для кутів $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. Знайдемо значення x, при яких значення виразу $2x-\frac{\pi}{6}$ дорівнюють цим кутам: $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$$2x=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+2\pi k,$$

$$2x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Приклад 5. Знайти проміжки, на яких функція $y=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ зростає.

Функція $y=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ зростає на проміжках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$. Знайдемо значення x, для яких значення виразу $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$ належать цим проміжкам:

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}+\pi k;$$

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k.$$

Приклад 6. Побудуйте графік функції $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

Побудову графіка здійснимо за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y=\sin x$. Тому виконаємо такий ланцюжок побудов:

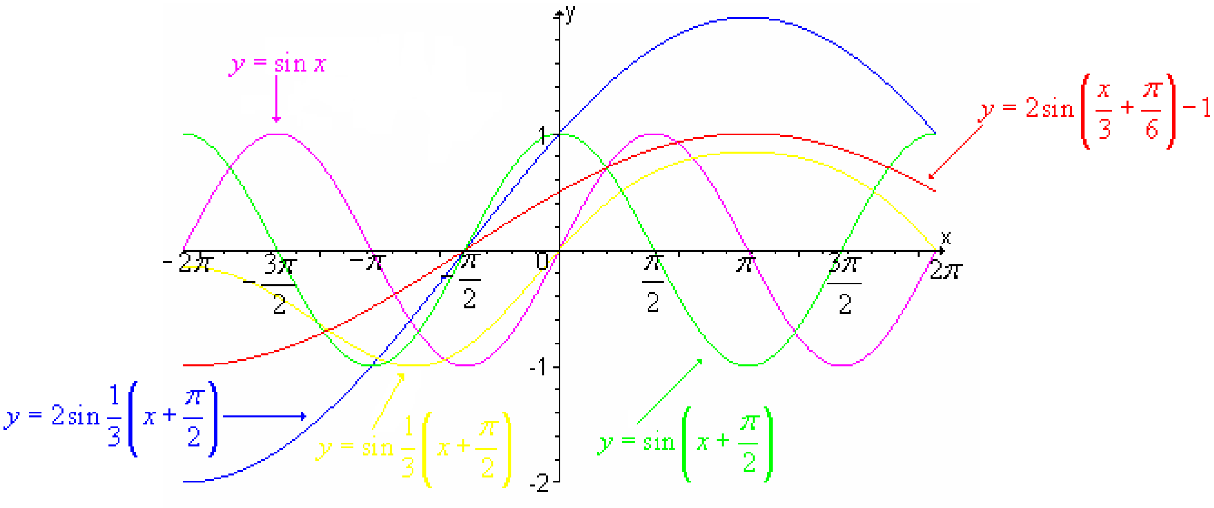
1) $y=\sin x$

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

3) $y=\sin\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

4) $y=2\sin\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

5) $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1.$



Вправи

1. Знайти нулі функції та проміжки, на яких вона набуває додатних значень; від’ємних значень:

1) $y=\sin 2x;$

2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right);$

3) $y=\cos\frac{x}{2};$

4) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right);$

5) $y=\mathrm{tg}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right);$

6) $y=\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).$

2. Що більше:

1) $\sin\frac{\pi}{7}$ чи $\sin\frac{2\pi}{7};$

2) $\sin\frac{\pi}{4}$ чи $\sin\frac{\pi}{5};$

3) $\cos\frac{\pi}{6}$ чи $\cos\frac{\pi}{7};$

4) $\cos\frac{\pi}{9}$ чи $\cos\frac{2\pi}{9};$

5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ чи $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

6) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$ чи $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{7}$;

7) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ чи $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

9) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ чи $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$;

10) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ чи $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$;

11) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$ чи $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

12) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ чи $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$?

3. Знайти значення x, при яких функція набуває найменшого значення:

1) $y=\sin\frac{x}{2}$;

2) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Знайти значення x, при яких функція набуває найбільшого значення:

1) $y=\cos 3x$;

2) $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

5. Знайти проміжки, на яких функція зростає; спадає:

1) $y=\sin(-x)$;

2) $y=\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$.

6. Побудуйте графіки функцій:

1) $y=\cos 3x$;

2) $y=2\cos x$;

3) $y=\sin\frac{x}{2}$;

4) $y=\frac{1}{2}\sin x$;

5) $y=\cos x+2$;

6) $y=\sin x-1$;

7) $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

8) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

9) $y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right);$

10) $y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$

11) $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right);$

12) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right);$

13) $y=\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1;$

14) $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-2.$

Обернені тригонометричні функції та їх властивості

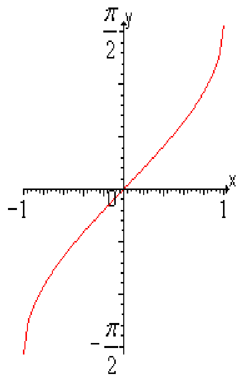
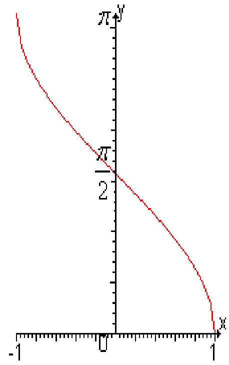
Функцію, обернену до функції $y=\sin x$, де $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, називається **арксинусом** і позначається $y=\arcsin x.$

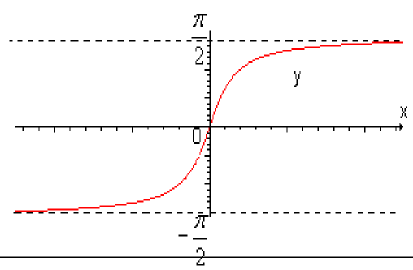
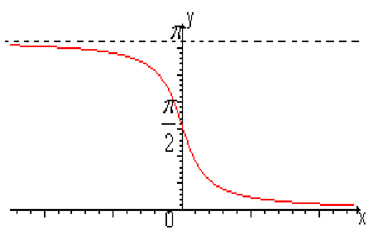
Функцію, обернену до функції $y=\cos x$, де $0\le x\le\pi$, називається **арккосинусом** і позначається $y=\arccos x.$

Функцію, обернену до функції $y=\mathrm{tg}x$, де $-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}$, називається **арктангенсом** і позначається $y=\mathrm{arctg}x.$

Функцію, обернену до функції $y=\mathrm{ctg}x$, де $0< x<\pi$, називається **арккотангенсом** і позначається $y=\mathrm{arcctg}x.$

№	Властивості	Функція	
		$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
1.	Область визначення	$[-1;1]$	$[-1;1]$
2.	Область значень	$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\pi]$
3.	Парність, непарність	непарна	ні парна, ні непарна
4.	Нулі функції	$x=0$	$x=1$
5.	Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$(0;1]$	$[-1;1]$
6.	Проміжки, на яких функція набуває від’ємних значень	$[-1;0)$	–
7.	Екстремуми	–	–
8.	Проміжки зростання	$[-1;1]$	–

9.	Проміжки спадання	–	$[-1;1]$
10.	Графік функції		

№	Властивості	Функція	
		$y=\mathrm{arctg}x$	$y=\mathrm{arcctg}x$
1.	Область визначення	R	R
2.	Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\pi)$
3.	Парність, непарність	непарна	ні парна, ні непарна
4.	Нулі функції	$x=0$	нулів немає
5.	Проміжки, на яких функція набуває додатних значень	$(0;\infty)$	$x\in R$
6.	Проміжки, на яких функція набуває від'ємних значень	$(-\infty;0)$	–
7.	Екстремуми	–	–
8.	Проміжки зростання	$x\in R$	–
9.	Проміжки спадання	–	$x\in R$
10.	Асимптоти	$y=-\frac{\pi}{2};\quad y=\frac{\pi}{2}$	$y=0;\quad y=\pi$
11.	Графік функції		

Властивості обернених тригонометричних функцій

$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad |a| \le 1$ $\qquad$ $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad a \in R$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad |a| \le 1$ $\qquad$ $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad a \in R$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \le 1$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in R$$

Приклад 1. Знайти значення виразу:

1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3};$

2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$

3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6};$

4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$

5) $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 3\cdot\left(-\arcsin\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 3\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6};$

6) $\sin^2\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^2\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1)^2 = 1.$

Приклад 2. Знайти область визначення функції $y = \arcsin(2x-1)$.

Область визначення арксинуса є відрізок $[-1;1]$. Знайдемо значення x, для яких значення виразу $2x-1$ належать цьому проміжку:

$-1 \le 2x - 1 \le 1;$

$0 \le 2x \le 2;$

$0 \le x \le 1.$

Отже, область визначення функції є проміжок $[0;1]$.

Приклад 3. Порівняйте числа $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ та $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$:

Оскільки $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$, а $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; то маємо, що $-\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$, тому $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вправи

1. Обчисліть:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2};$

2) $\arcsin 1$;

3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

5) $\arccos 1$;

6) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

8) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

9) $\mathrm{arctg}\,0$;

10) $\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

11) $\mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;

12) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. Знайдіть значення виразів:

1) $\arcsin 0+\arccos 0$;

2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}$;

4) $\arcsin(-1)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin(-1)$;

7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

8) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}\sqrt{3}$;

10) $\mathrm{arctg}\,1-\mathrm{arctg}(-1)$;

11) $\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\mathrm{arctg}\,0$;

12) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}.$

3. Порівняйте числа:

1) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ та $\operatorname{arctg}(-1)$;

2) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ та $\arcsin\dfrac{1}{2}$;

3) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ та $\arcsin\dfrac{1}{2}$;

4) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ та $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Розмістіть числа в порядку зростання:

1) $\arcsin 0,6$; $\arcsin(-0,8)$; $\arcsin 0,1$;

2) $\arcsin(-0,5)$; $\arcsin(-0,7)$; $\arcsin\dfrac{\pi}{8}$;

3) $\arccos 0,4$; $\arccos(-0,2)$; $\arccos(-0,8)$;

4) $\arccos 0,9$; $\arccos(-0,6)$; $\arccos\dfrac{\pi}{5}$;

5) $\operatorname{arctg}100$; $\operatorname{arctg}(-5)$; $\operatorname{arctg}0,7$;

6) $\operatorname{arcctg}1,2$; $\operatorname{arcctg}\pi$; $\operatorname{arcctg}(5)$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$;

2) $y=\arcsin(1-2x)$;

3) $y=\arccos 3x$;

4) $y=\arccos(3-x)$.

6. Знайти значення виразу:

1) $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $\cos\left(3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$;

3) $\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

4) $\operatorname{tg}^2\left(6\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

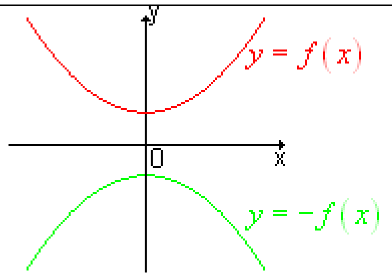
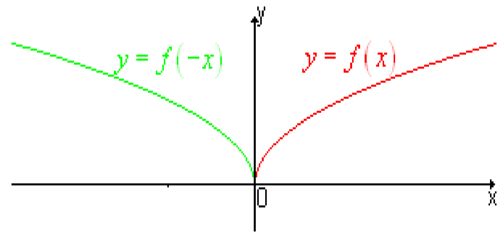
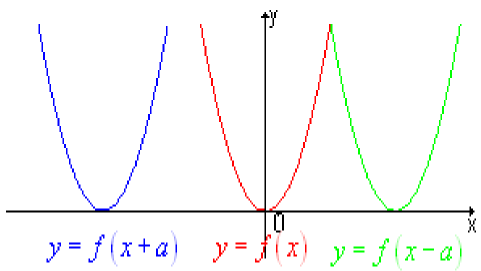
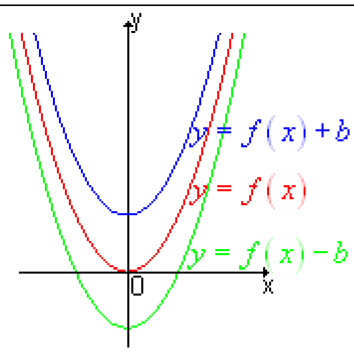
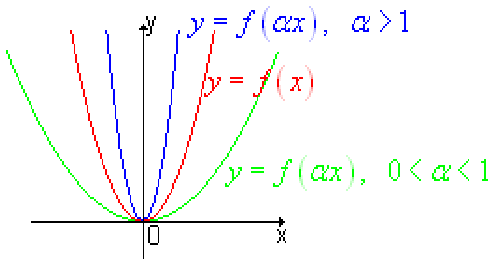
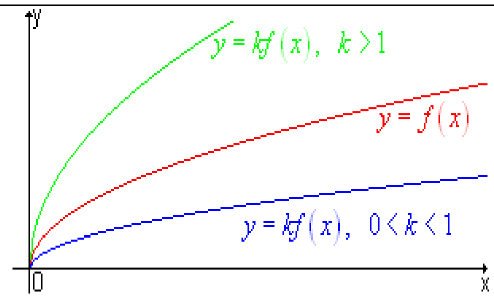
5) $2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(-1)+\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

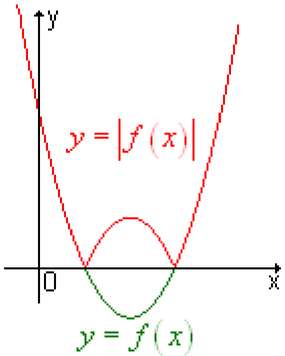
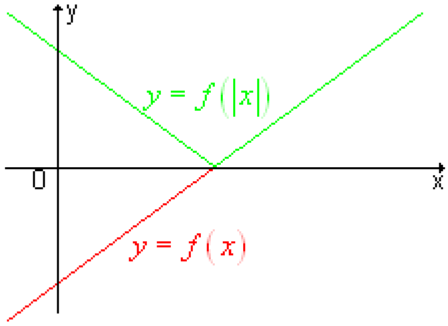
6) $3\arcsin\frac{1}{2}-\text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

7) $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

8) $\arcsin(-1)-\frac{3}{2}\arccos\frac{1}{2}+3\,\text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Перетворення графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

<table>
<tr><td>1.</td><td>Перетворення симетрії відносно осі Ox: $f(x)\to -f(x)$</td><td>2.</td><td>Перетворення симетрії відносно осі Oy: $f(x)\to f(-x)$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Паралельне перенесення вздовж осі Ox: $f(x)\to f(x-a)$</td><td>4.</td><td>Паралельне перенесення вздовж осі Oy: $f(x)\to y=f(x)-b$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Стиск і розтяг вздовж осі Ox: $f(x)\to f(\alpha x),\ \alpha>0$</td><td>6.</td><td>Стиск і розтяг вздовж осі Oy: $f(x)\to kf(x),\ k>1$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Побудова графіка функції $y=\left|f(x)\right|$</td><td>8.</td><td>Побудова графіка функції $y=f\left(\left|x\right|\right)$</td></tr>
</table>

Вправи

1. Побудуйте графіки функцій:

$y=x^2;\quad y=-x^2;$

$y=x^2;\quad y=x^2-3;\quad y=x^2+4;$

$y=x^2;\quad y=3x^2;\quad y=\dfrac{1}{2}x^2;$

$y=x^2;\quad y=(x-2)^2;\quad y=(x+2)^2;$

$y=x^3;\quad y=(-x)^3;\quad y=-x^3;$

$y=\sqrt{x};\quad y=-\sqrt{x};\quad y=\sqrt{-x};$

$y=\sqrt{x};\quad y=\sqrt{1-x};\quad y=\sqrt{x+2};$

$y=|x|;\quad y=|x-2|;\quad y=|x+2|;$

$y=|x-2|+1;\quad y=|x-2|-1;\quad y=|x+2|+1;\quad y=|x+2|-1;$

$y=(x-2)^2+2;\quad y=(x+3)^2-3;\quad y=(x-2)^2-2;\quad y=(x+3)^2+2;$

$y=\dfrac{1}{x};\quad y=\dfrac{1}{x+2};\quad y=\dfrac{1}{x-4};$

$y=\dfrac{1}{x};\quad y=\dfrac{1}{x}+2;\quad y=\dfrac{1}{x}-4;$

$y=\dfrac{1}{x};\quad y=\dfrac{1}{x+2}-1;\quad y=\dfrac{1}{x-4}+1;$

$y=x^2-4x+3;\quad y=\left|x^2-4x+3\right|;\quad y=x^2-4|x|+3;$

$y=x^2-6x+8;\quad y=\left|x^2-6x+8\right|;\quad y=x^2-6|x|+8;$

$y=2-\sqrt{x^2-4x+4};\quad y=2+\sqrt{x^2-6x+9}.$

2. Запишіть формулою функцію, графік якої одержано в результаті:

1) Паралельного перенесення графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$ на 3 одиниці вздовж осі Ox.
2) Паралельного перенесення графіка функції $y=\sqrt{x}$ на –3 одиниці вздовж осі Ox.
3) Паралельного перенесення графіка функції $y=x^3$ на 3 одиниці вздовж осі Oy.

4) Розтягу графіка функції $y=|x|$ від точки $(0;0)$ вздовж осі ординат у 3 рази.

5) Стиску графіка функції $y=\frac{1}{x}$ до точки $(0;0)$ вздовж осі абсцис у 3 рази.

Відповідь: 1) $y=\frac{1}{x-3}$; 2) $y=\sqrt{x+3}$; 3) $y=x^3+3$; 4) $y=x^3-3$; 5) $y=3|x|$; 6) $y=\frac{1}{3x}$.