Комплексні числа

Число i називають **уявною одиницею**. $i^2=-1 \Rightarrow i=\sqrt{-1}$

$z=a+bi-$ **комплексне число,** де a і $b-$ дійсні числа, $i-$ уявна одиниця.

$a-$ **дійсна частина** комплексного числа

b – **уявною частиною** комплексного числа.

$z=bi-$ **чисто уявне** комплексне число.

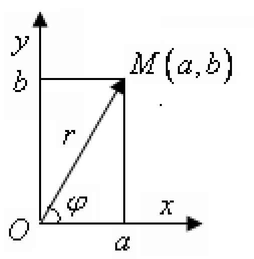
Запис комплексного числа у вигляді $z=a+bi$ називається **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Приклади комплексних чисел:

$$z=5,\ z=5i,\ z=-3+5i,\ z=7-2i.$$

Рівність комплексних чисел $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$. та $c+di$

$a+bi$ та $a-bi-$спряжені комплесні числа.



Комплексні числа $z=a+bi$ можна зображати на площині. В декартовій прямокутній системі координат числа $z=a+bi$ зображаються з допомогою точок $M(a;b)$. Вісь Ox називається **дійсною віссю**, вісь Oy – **уявною віссю.**

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ називається довжина вектора $\vec{z}$, яку можна знайти за формулою $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Позначивши модуль комплексного числа буквою r, одержимо $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Аргументом комплексного числа називається кут φ, який утворює вектор $\vec{z}$ з додатнім напрямом осі абсцис. Величину кута φ визначають з системи

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{r}; \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}. \end{cases}$$

Дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній формі

$$z_1=a_1+b_1 i \text{ та } z_2=a_2+b_2 i$$

Додавання, віднімання : $z_1 \pm z_2=(a_1 \pm a_2)+(b_1 \pm b_2)i,$

Множення: $z_1 \cdot z_2=(a_1 \cdot a_2-b_1 \cdot b_2)+(a_1 \cdot b_2+a_2 \cdot b_1)i.$

Ділення: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$

Приклад 1. Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1=2+3i$ та $z_2=3-2i.$

Розв'язання.

$z_1+z_2=(2+3i)+(3-2i)=2+3i+3-2i=2+3+(3-2)i=5+1i=5+i;$

$z_1-z_2=(2+3i)-(3-2i)=2+3i-3+2i=2-3+(3+2)i=-1+5i;$

$z_1 \cdot z_2=(2+3i)\cdot(3-2i)=2\cdot(3-2i)+3i\cdot(3-2i)=6-4i-9i-6i^2=6-13i-6\cdot(-1)=$
$6-13i+6=12-13i;$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)}=\frac{2\cdot3+2\cdot2i+3i\cdot3+3i\cdot2i}{3^2-(2i)^2}=\frac{6+4i+9i-6}{9+4}=\frac{13i}{13}=i.$$

Варіант 1.

№1. Задано два комплексні числа $z_1 = 2 + 2i$ та $z_1 = 3 - 2i$. Обчислити:

1. $z_1 + z_2$;
2. $z_1 - z_2$;
3. $z_1 z_2$;
4. $\frac{z_1}{z_2}$;
5. $2z_1 - 3z_2$;
6. $z_1^{\,2}$
7. $z_2^{\,2}$;
8. $|z_1|$;
9. $|z_2|$.

```
> z1+z2;
```
$$5$$

```
> z1-z2;
```
$$-1 + 4\,I$$

```
> z1*z2;
```
$$10 + 2\,I$$

```
> z1/z2;
```
$$\frac{2}{13} + \frac{10}{13}\,I$$

```
> z1^2;
```
$$8\,I$$

```
> z2^2;
```
$$5 - 12\,I$$

```
> abs(z1);
```
$$2\sqrt{2}$$

```
> abs(z2);
```
$$\sqrt{13}$$

```
> 2*z1-3*z2;
```
$$-5 + 10\,I$$

№2. Розв’язати рівняння $x^2 - 3x + 6 = 0$.

```
> solve(x^2-3*x+6=0,x);
```
$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,I\sqrt{15},\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,I\sqrt{15}$$

Варіант 2.

№1. Задано два комплексні числа $z_1 = 2+3i$ та $z_1 = 4-2i$. Обчислити:

1. $z_1 + z_2$;
2. $z_1 - z_2$;
3. $z_1 z_2$;
4. $\frac{z_1}{z_2}$;
5. $3z_1 - 2z_2$;
6. $z_1^{\,2}$
7. $z_2^{\,2}$;
8. $|z_1|$;
9. $|z_2|$.

```
> z1+z2;
```
$$6 + I$$
```
> z1-z2;
```
$$-2 + 5\,I$$
```
> z1*z2;
```
$$14 + 8\,I$$
```
> z1/z2;
```
$$\frac{1}{10} + \frac{4}{5}\,I$$
```
> z1^2;
```
$$-5 + 12\,I$$
```
> z2^2;
```
$$12 - 16\,I$$
```
> abs(z1);
```
$$\sqrt{13}$$
```
> abs(z2);
```
$$2\sqrt{5}$$
```
> 3*z1-2*z2;
```
$$-2 + 13\,I$$

№2. Розв'язати рівняння $x^2 - 2x + 6 = 0$.

```
> solve(x^2-2*x+6=0,x);
```
$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,I\sqrt{15},\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,I\sqrt{15}$$

Варіант 3.

№1. Задано два комплексні числа $z_1 = 3 + 2i$ та $z_1 = 4 - 3i$. Обчислити:

1. $z_1 + z_2$;
2. $z_1 - z_2$;
3. $z_1 z_2$;
4. $\dfrac{z_1}{z_2}$;
5. $3z_1 - 4z_2$;
6. $z_1^{\,2}$
7. $z_2^{\,2}$;
8. $|z_1|$;
9. $|z_2|$.

```
> z1+z2;
```
$$7 - I$$

```
> z1-z2;
```
$$-1 + 5\,I$$

```
> z1*z2;
```
$$18 - I$$

```
> z1/z2;
```
$$\frac{6}{25} + \frac{17}{25}\,I$$

```
> z1^2;
```
$$5 + 12\,I$$

```
> z2^2;
```
$$7 - 24\,I$$

```
> abs(z1);
```
$$\sqrt{13}$$

```
> abs(z2);
```
$$5$$

```
> 3*z1-4*z2;
```
$$-7 + 18\,I$$

№2. Розв’язати рівняння $x^2 - 4x + 6 = 0$.

```
> solve(x^2-4*x+6=0,x);
```
$$2 + I\,\sqrt{2},\, 2 - I\,\sqrt{2}$$

Варіант 4.

№1. Задано два комплексні числа $z_1 = 4+2i$ та $z_1 = 2-3i$. Обчислити:

1. $z_1 + z_2$;
2. $z_1 - z_2$;
3. $z_1 z_2$;
4. $\dfrac{z_1}{z_2}$;
5. $3z_1 - 2z_2$;
6. $z_1{}^2$
7. $z_2{}^2$;
8. $|z_1|$;
9. $|z_2|$.

```
> z1+z2;
```
$$6 - I$$

```
> z1-z2;
```
$$2 + 5\, I$$

```
> z1*z2;
```
$$14 - 8\, I$$

```
> z1/z2;
```
$$\frac{2}{13} + \frac{16}{13}\, I$$

```
> z1^2;
```
$$12 + 16\, I$$

```
> z2^2;
```
$$-5 - 12\, I$$

```
> abs(z1);
```
$$2\sqrt{5}$$

```
> abs(z2);
```
$$\sqrt{13}$$

```
> 3*z1-2*z2;
```
$$8 + 12\, I$$

№2. Розв’язати рівняння $x^2 - 4x + 5 = 0$.

```
> solve(x^2-4*x+5=0,x);
```
$$2 + I,\ 2 - I$$

Дії над комплексними числами заданими в тригонометричній формі

Нехай задано два комплексних числа записаних в тригонометричній формі $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ та $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$..

При **множенні** двох комплексних чисел, заданих в тригонометричній форм,і їх модулі перемножуються, а аргументи додаються:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

При діленні двох комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, їх модулі діляться, а аргументи віднімаються:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

При піднесенні комплексного числа, заданого в тригонометричній формі, **до** n **-го степеня** користуються формулою Муавра:

$$z^n = r^n\left(cos\varphi n + i\sin\varphi n\right).$$

Корінь n**-го степеня** з комплексного числа z має рівно n значень, які знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де k набуває n значень: $0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$.

Приклад 2. Дано комплексні числа $z_1 = 4\left(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right)$ і $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$. Знайти їх добуток і частку. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

Розв’язання.

Виконаємо дії в тригонометричній формі:

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\left(120^\circ + 30^\circ\right) + i\sin\left(120^\circ + 30^\circ\right)\right) = 2 \cdot \left(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\sqrt{3} + i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4 : \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(120^\circ - 30^\circ\right) + i\sin\left(120^\circ - 30^\circ\right)\right) = 8 \cdot \left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) = 8 \cdot \left(0 + i \cdot 1\right) = 8i.$$

Дії над комплексними числами заданими в показниковій формі

Якщо комплексні числа задані в показниковій формі $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то множення, ділення, піднесення до степеня здійснюється за правилами дій з степенями:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z_1^n = r_1^n e^{\varphi_1 n}.$$

$$\sqrt[n]{z_1}=\sqrt[n]{r_1}e^{i\frac{\varphi_1+2\pi k}{n}},\text{ при } k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n-1.$$

Приклад 3. Записати комплексне число $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраїчній і тригонометричній формах.

Розв'язання.

Згідно умови задачі $r=4;\ \ \varphi=\dfrac{5\pi}{6},$ тому

$$a=4\cos\frac{5\pi}{6}=4\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-4\cos\frac{\pi}{6}=-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3};$$

$$b=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Звідси, $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}=-2\sqrt{3}+2i.$

З показникової форми запису комплексного числа $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ слідує, що $|z|=4$, а $\arg z=\dfrac{5\pi}{6}.$

Тоді його тригонометрична форма має вигляд

$$z=4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\cos\frac{5\pi}{6}\right).$$