## Комплексні числа

Множини, елементами яких є числа, називаються числовими множинами.

Наведемо приклади числових множин.

Множина натуральних чисел: $N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...\}$;

Множина цілих невід'ємних цілих чисел: $Z_+ = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,\ ...\}$;

Множина цілих чисел: $Z = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ ...,\ \pm n,\ ...\}$;

Множина раціональних чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$;

Множина дійсних чисел $R = \{x | x = a, a_1 a_2 a_3 ... a_n ...\}$, де $a \in Z$, $a_i$ – цифри від нуля до дев'яти.

Між числовими множинами має місце співвідношення

$$N \subset Z_+ \subset Z \subset Q \subset R.$$

## Модуль дійсного числа

**Модулем** дійсного числа $x$, позначається $|x|$, називається число, яке визначається формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & якщо \quad x \geq 0; \\ -x, & якщо \quad x < 0. \end{cases}$$

Властивості модуля

1. Число $a$ і йому протилежне число $-a$ мають рівні модулі: $|-a| = |a|$.
2. Модуль добутку (чи частки) двох чисел дорівнює добутку модулів (чи частці) модулів:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. Нерівність трикутника: $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

## Комплексні числа

Рівняння $x^2 + 1 = 0$ на множині дійсних чисел не має розв'язку.

Припустимо, що існує таке число, квадрат якого дорівнює $-1$. Позначимо це число буквою $i$. Тоді можна записати: $i^2 = -1$. З цієї рівності маємо $i = \sqrt{-1}$.

Число $i$ називають уявною одиницею.

В цих позначеннях рівняння $x^2 + 1 = 0$ має два розв'язки: $x = \pm i$.

Числа виду $z = a + bi$, де $a$ і $b$ дійсні числа, $i$ уявна одиниця називають **комплексними числами.**

При цьому число $a$ називають **дійсною частиною** комплексного числа $z$ і позначають $a = \operatorname{Re} z$, а $b$ – **уявною частиною** $z$ і позначають $b = \operatorname{Im} z$.

Якщо $a = 0$, то комплексне число $bi$ називається **чисто уявним.** Якщо $b = 0$, то комплексне число $a + bi = a$ і називається **дійсним.** Якщо $\begin{cases} a = 0; \\ b = 0, \end{cases}$ то комплексне число $0 + 0i$ дорівнює нулю.

Запис комплексного числа у вигляді $z = a + bi$ називається **алгебраїчною формою** комплексного числа.

Приклади комплексних чисел:

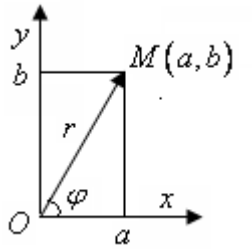
$$z = 5,\ z = 5i,\ z = -3 + 5i,\ z = 7 - 2i.$$

Два комплексні числа $a + bi$ та $c + di$ **рівні** тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні частини $a = c$ і коефіцієнти при уявних частинах $b = d$.

Наприклад. Числа $z_1 = 7 - 2i,\ z_2 = 7 - 2i$ рівні, оскільки їхні дійсні частини рівні $7 = 7$ і уявні частини рівні $-2 = -2$.

Два комплексні числа, які відрізняються лише знаком уявної частини називаються **спряженими:**

$$z = a + bi \quad \text{ñï ðÿæåí å äî} \quad \bar{z} = a - bi.$$




Комплексні числа $z = a + bi$ можна зображати на площині. В декартовій прямокутній системі координат числа $z = a + bi$ зображаються з допомогою точок $M(a;b)$. Вісь $Ox$ називається **дійсною віссю**, вісь $Oy$ – **уявною віссю.**

Кожній точці площини з координатами $(a;b)$ відповідає один і тільки один вектор з початком $O(0;0)$ і кінцем $Z(a;b)$. Тому комплексне число $z = a + bi$ можна зобразити у вигляді вектора $\vec{z}$ з початком в точці $O(0;0)$ і кінцем в точці $Z(a;b)$.

**Модулем** комплексного числа $z = a + bi$ називається довжина вектора $\vec{z}$, яку можна знайти за формулою $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Позначивши модуль комплексного числа буквою $r$, одержимо $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

**Аргументом** комплексного числа називається кут $\varphi$, який утворює вектор $\vec{z}$ з додатнім напрямом осі абсцис. Величину кута $\varphi$ визначають з системи

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}. \end{cases}$$

Остання система має нескінченну множину розв'язків виду $\varphi + 2\pi k$, де $k \in Z$.

При $k = 0$ одержуємо **головне значення аргументу**, яке називають **аргументом комплексного числа.**

Головне значення аргументу знаходиться на проміжку $[0;2\pi)$ і відраховується від додатного напряму осі $Ox$ проти годинникової стрілки.

Підставивши у $z = a + bi$ замість $a$ і $b$ їх значення $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, одержимо **тригонометричну форму** комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Використовуючи формулу Ейлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$,

з тригонометричної форми одержуємо **показникову форму** комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

## Дії над комплексними числами заданими в алгебраїчній формі

**Додавання, віднімання, множення** комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданих в алгебраїчні формі, проводять за правилами відповідних дій над многочленами, з урахуванням того, що $i^2 = -1$:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i.$$

При **діленні** комплексних чисел ділене і дільник множать на вираз спряжений до дільника, а потім відокремлюють дійсну і уявну частини:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

**Приклад 1.** Знайти суму, різницю, добуток і частку комплексних чисел $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = 3 - 2i.$

Розв'язання.

$z_1 + z_2 = (2+3i) + (3-2i) = 2 + 3i + 3 - 2i = 2 + 3 + (3-2)i = 5 + 1i = 5 + i;$

$z_1 - z_2 = (2+3i) - (3-2i) = 2 + 3i - 3 + 2i = 2 - 3 + (3+2)i = -1 + 5i;$

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(3-2i) = 2\cdot(3-2i) + 3i\cdot(3-2i) = 6 - 4i - 9i - 6i^2 = 6 - 13i - 6\cdot(-1) =$
$6 - 13i + 6 = 12 - 13i;$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{2\cdot 3 + 2\cdot 2i + 3i\cdot 3 + 3i\cdot 2i}{3^2 - (2i)^2} = \frac{6 + 4i + 9i - 6}{9+4} = \frac{13i}{13} = i.$$

## Дії над комплексними числами заданими в тригонометричній формі

Нехай задано два комплексних числа записаних в тригонометричній формі $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$..

При **множенні** двох комплексних чисел, заданих в тригонометричній форм,і їх модулі перемножуються, а аргументи додаються:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

**При діленні** двох комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, їх модулі діляться, а аргументи віднімаються:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

**При піднесенні** комплексного числа, заданого в тригонометричній формі, **до** $n$ **-го степеня** користуються формулою Муавра:

$$z^n = r^n(cos\varphi n + i\sin\varphi n).$$

**Корінь $n$-го степеня** з комплексного числа $z$ має рівно $n$ значень, які знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де $k$ набуває $n$ значень: $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\text{-}1$.

**Приклад 2.** Дано комплексні числа $z_1=4\left(\cos120^\circ+i\sin120^\circ\right)$ і $z_2=\frac{1}{2}\left(\cos30^\circ+i\sin30^\circ\right)$. Знайти їх добуток і частку. Відповідь записати в алгебраїчній формі.

Розв'язання.

Виконаємо дії в тригонометричній формі:

$$z_1\cdot z_2=4\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(120^\circ+30^\circ\right)+i\sin\left(120^\circ+30^\circ\right)\right)=2\cdot\left(\cos150^\circ+i\sin150^\circ\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\sqrt{3}+i.$$

$$\frac{z_1}{z_2}=4:\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(120^\circ-30^\circ\right)+i\sin\left(120^\circ-30^\circ\right)\right)=8\cdot\left(\cos90^\circ+i\sin90^\circ\right)=8\cdot\left(0+i\cdot1\right)=8i.$$

## Дії над комплексними числами заданими в показниковій формі

Якщо комплексні числа задані в показниковій формі $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ та $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то множення, ділення, піднесення до степеня здійснюється за правилами дій з степенями:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z_1^n=r_1^ne^{\varphi_1n}.$$

$$\sqrt[n]{z_1}=\sqrt[n]{r_1}e^{i\frac{\varphi_1+2\pi k}{n}},\ \text{при}\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n-1.$$

**Приклад 3.** Записати комплексне число $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ в алгебраїчній і тригонометричній формах.

Розв'язання.

Згідно умови задачі $r=4;\ \ \varphi=\frac{5\pi}{6}$, тому

$$a=4\cos\frac{5\pi}{6}=4\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-4\cos\frac{\pi}{6}=-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3};$$

$$b=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Звідси, $z=4e^{\frac{5\pi}{6}i}=-2\sqrt{3}+2i.$

З показникової форми запису комплексного числа $z = 4e^{\frac{5\pi}{6}i}$ слідує, що $|z| = 4$, а $\arg z = \frac{5\pi}{6}$.

Тоді його тригонометрична форма має вигляд

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cos\frac{5\pi}{6}\right).$$