Первісна. Основна властивість первісної. Правила знаходження первісних.

Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $(a;b)$ називається така функція $F(x)$, похідна якої для всіх $x \in (a;b)$ дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a;b)$.

Операція знаходження первісної $F(x)$ для даної функції $y = f(x)$ називається ***інтегруванням***, яка є оберненою до дії диференціювання.

Ознака сталості функції. Якщо $F'(x) = 0$ на деякому проміжку, то функція $F(x)$ – стала на цьому проміжку.

Теорема (основна властивість первісних). Будь-яку первісну для функції $f(x)$ на деякому проміжку можна записати у вигляді $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$ на деякому проміжку, а C – довільна стала.

Вираз $F(x) + C$ називають **загальним виглядом первісних** для функції $f(x)$.

Основній властивості первісної можна надати геометричний зміст: графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ утворюються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy.

Три правила знаходження первісних

Правило 1. Якщо F – первісна для f, а G – первісна для g, то $F + G$ – первісна для $f + g$.

$$(F+G)' = F' + G' = f + g$$

Правило 2. Якщо F – первісна для f, а k-стала, то kF - первісна для kf.

$$(kF)' = kF' = kf$$

Правило 3. Якщо F – первісна для f, а k і b – сталі, причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ – первісна для функції $f(kx+b)$.

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b)$$

Вправи

Для функції $f(x)$ знайти первісну, графік якої проходить через точку M.

1. $f(x) = 2x + 1;\ \ M(0;0)$.
2. $f(x) = x + 2;\ \ M(1;3)$.
3. $f(x) = 3x^2 - 2x;\ \ M(1;4)$.
4. $f(x) = -x^2 + 3x;\ \ M(2;-1)$.
5. $f(x) = 2\cos x;\ \ M\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$.
6. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);\ \ M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$.
7. $f(x) = 1 - 2x;\ \ M(3;2)$.
8. $f(x) = 1 - x^2;\ \ M(-3;9)$.
9. $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2};\ \ M(-1;4)$.
10. $f(x) = \frac{1}{x^4};\ \ M\left(\frac{1}{2};3\right)$.

11. $f(x)=4x^3-2x-3;\ \ M(-1;-3).$

12. $f(x)=5x^4-3x^2-3;\ \ M(1;2).$

13. $f(x)=4x\left(x^2-1\right);\ \ M(1;2).$

14. $f(x)=12x^2(x+1);\ \ M(1;2).$

15. $f(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-2x;\ \ M(1;1).$

16. $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-;\ \ M(1;2).$

17. $f(x)=8x^3+3x^2-4x-2;\ \ M(-1;2).$

18. $f(x)=1-2x-6x^2-4x^3;\ \ M(1;-2).$

4. Швидкість руху тіла задано рівнянням $v(t)=3t^2+2t-1$ (м/с). Знайти шлях, який пройде тіло за 10 с від початку руху.

Відповідь: 1090 м

5. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=6t-t^2$ (м/с). Знайти шлях, який пройде тіло від початку руху до його зупинки.

Відповідь: 36 м

6. Матеріальна точка масою 4 кг рухається по осі Ox під дією сили, напрямленої вздовж цієї осі. У момент часу $t=2$ с сила дорівнює $F(t)=8+8t.$ Знайти формулу залежності $x(t),$ коли відомо, що в заданий момент часу швидкість була рівною $v=9$ м/с, а координата відповідно рівна $x=7.$

Відповідь: $x(t)=\dfrac{1}{3}t^3+t^2+t-1\dfrac{2}{3}.$

7. Матеріальна точка масою 2 кг рухається по осі Ox під дією сили, напрямленої вздовж цієї осі. У момент часу $t=2$ с сила дорівнює $F(t)=3t-2.$ Знайти формулу залежності $x(t),$ коли відомо, що в заданий момент часу швидкість була рівною $v=3$ м/с, а координата відповідно рівна $x=1.$

Відповідь: $x(t)=\dfrac{1}{4}t^3-\dfrac{1}{2}t^2+2t-3.$

8. Матеріальна точка масою 7 кг рухається по осі Ox під дією сили, напрямленої вздовж цієї осі. У момент часу $t=\pi$ с сила дорівнює $F(t)=14\sin t.$ Знайти формулу залежності $x(t),$ коли відомо, що в заданий момент часу швидкість була рівною $v=2$ м/с, а координата відповідно рівна $x=3.$

Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.

Невизначений інтеграл.

Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** і позначається символом $\int f(x)dx$, тобто $\int f(x)dx=F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, а C – довільна стала.

У наведеній рівності знак $\int$ називається знаком інтеграла, функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, змінну x – змінною інтегрування і доданок C – сталою інтегрування.

Наприклад. Загальний вигляд первісної для функції $f(x)=x^3$ записується так: $\frac{x^4}{4}+C$, отже, $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=f(x)$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

Таблиця невизначених інтегралів.

$$\int dx=x+C;\qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad (n\neq -1);\qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;\qquad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C;\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$\int e^x dx=e^x+C;\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+C;\qquad \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

$$\int\cos xdx=\sin x+C;$$

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int\left(3-\frac{2}{x^4}+2\sin 3x-x^6+\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx.$

Застосуємо властивості та таблицю невизначених інтегралів:

$$\int\left(3-\frac{2}{x^4}+2\sin 3x-x^6+\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx=\int 3dx-\int\frac{2}{x^4}dx+\int 2\sin 3xdx-\int x^6dx+\int\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=$$

$$=3x-2\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{1}{3}(-\cos 3x)-\frac{x^{6+1}}{6+1}+2\cdot 2tg\frac{x}{2}+C=3x+\frac{2}{3x^3}-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{x^7}{7}+4tg\frac{x}{2}+C.$$

Вправи

1. Знайти невизначені інтеграли **(1 – 31):**

1. $\int(x+3)dx$

2. $\int(3+x^4)dx.$

3. $\int\left(\frac{1}{x^4}-3\right)dx.$

4. $\int\left(3-\frac{2}{x^4}\right)dx.$

5. $\int(6x^2-3)dx.$

6. $\int(5-36x^2-24x^5)dx.$

7. $\int(x-\cos x)dx.$

8. $\int 2\sin x dx.$

9. $\int 4\sin 3x dx.$

10. $\int 3\cos\frac{x}{3}dx.$

11. $\int\cos 3x dx.$

12. $\int\sin\frac{x}{4}dx.$

13. $\int\left(x^4+\frac{2}{x^2}\right)dx.$

14. $\int\left(2x-\frac{3}{x^6}-\cos x\right)dx.$

15. $\int(3x-4)^5dx.$

16. $\int(4x-5)^5dx.$

17. $\int(3-6x)^7dx.$

18. $\int(2-4x)^5dx.$

19. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}.$

20. $\int\frac{2dx}{\sin^2 x}.$

21. $\int 4\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)dx.$

22. $\int 3\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx.$

23. $\int\frac{3dx}{(4-20x)^4}.$

24. $\int \frac{4dx}{(3-5x)^6}.$

25. $\int \frac{2dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}.$

26. $\int \frac{4dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)}.$

27. $\int \left(-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}\right)dx.$

28. $\int \left(4-\cos 2x+3\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right)dx.$

29. $\int \left(\frac{3}{\cos^2(3x-1)}-2\sin(3-x)+2x\right)dx.$

30. $\int \left(\frac{1}{\sin^2 3x}+\frac{1}{\sqrt{3-x}}-3x^2\right)dx.$

31. $\int \left(\frac{4}{(3-2x)^3}+\frac{2}{\sqrt{4x-2}}-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right)dx.$

Безпосереднє інтегрування у невизначеному інтегралі.

Безпосереднє інтегрування ґрунтується на прямому використанні таблиці інтегралів. Тут можуть бути такі випадки:

1. даний інтеграл відшукується безпосередньо за відповідним табличним інтегралом;
2. даний інтеграл після застосування властивостей 4 і 5 зводять до одного або кількох табличних інтегралів;
3. даний інтеграл після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією і застосування властивостей 4 і 5 зводять до одного або кількох табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайдіть такі інтеграли:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$

2. $\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}+C = 6\cdot\frac{x^3}{3}+C = 2x^3+C.$

3. $\int\left(4x^3-6x^2-4x+3\right)dx = \int 4x^3dx - \int 6x^2dx - \int 4xdx + \int 3dx = 4\int x^3dx - 6\int x^2dx -$

$4\int xdx + 3\int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C = x^4-2x^3-2x^2+3x+C.$

4. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx = \int\left(x^2+3x+4\right)dx = \int x^2dx + 3\int xdx + 4\int dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x+C$

$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C = \frac{x^{-3}}{-3}+C = -\frac{1}{3x^3}+C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C.$

7. $\int \frac{2dx}{x+3} = 2\int \frac{dx}{x+3}$.

Оскільки $dx = d(x+3)$, то $2\int \frac{dx}{x+3} = 2\int \frac{d(x+3)}{x+3} = 2\ln|x+3| + C$.

8. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$. Оскільки $d(x^3+1) = 3x^2dx$, а $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3+1)$, то

$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3+1)}{(x^3+1)} = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$.

9. $\int 3^{5x}dx = \frac{3^{5x}}{\ln 3}\cdot\frac{1}{5} + C = \frac{3^{5x}}{5\ln 3} + C$.

10. $\int 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x dx = \int 30^x dx = \frac{30^x}{\ln 3} + C$.

11. $\int 2^{x^2} xdx$. Оскільки $d(x^2) = 2xdx$, то $xdx = \frac{1}{2}d(x^2)$, тому

$\int 2^{x^2} dx = \int 2^{x^2}\cdot\frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}\int 2^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C$.

12. $\int e^{-5x}dx = \frac{1}{-5}e^{-5x} + C = -\frac{e^{-5x}}{5} + C$.

13. $\int e^{-3x^2}xdx$. Оскільки $d(-3x^2) = -6xdx$, а $xdx = -\frac{1}{6}d(-3x^2)$, тому

$\int e^{-3x^2}dx = -\frac{1}{6}\int e^{-3x^2}d(-3x^2) = -\frac{1}{6}\cdot e^{-3x^2} + C$.

14. $\int \cos(5x-3)dx = \frac{1}{5}\sin(5x-3) + C$.

15. $\int \frac{\cos xdx}{3\sin x - 1}$. Оскільки $d(3\sin x - 1) = 3\cos xdx$, то $\cos xdx = \frac{1}{3}d(3\sin x - 1)$,

тому $\int \frac{\cos xdx}{3\sin x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3\sin x - 1)}{3\sin x - 1} = \frac{1}{3}\ln|3\sin x - 1| + C$.

16. $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$. Оскільки $d(x^3) = 3x^2dx$, то $x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$, тому

$\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3}tgx^3 + C$.

17. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{3x^2-9} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right| + C$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C$.

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\cdot \arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$

23. $\int \frac{dx}{16+x^2} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4} arctg\frac{x}{4} + C.$

24. $\int \frac{dx}{25+4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{25}{4}+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}} arctg\frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10} arctg\frac{2x}{5} + C.$

Вправи

1. Знайти інтеграли (**1 – 18**):

1. $\int 3dx;\ \int -4dx.$
2. $\int 2xdx;\ \int 4t^3dt.$
3. $\int\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5\right)dx;\quad \int\left(4x^3 - 6x^2 - 4x + 7\right)dx.$
4. $\int \frac{x^2-x}{3x}dx;\ \int \frac{2t-3t^3}{5t}dt.$
5. $\int\left(\frac{3}{x^4}+\frac{8}{x^5}\right)dx;\ \int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}+1\right)dx.$
6. $\int \sqrt[4]{x^3}dx;\ \int 5x\sqrt{x}dx.$
7. $\int \frac{5dx}{1+x};\ \int \frac{3dt}{2-t}.$
8. $\int \frac{xdx}{x^2+1};\ \int \frac{x^2dx}{8-x^3}.$
9. $\int 4^{2x}dx;\ \int 6^{\frac{x}{3}}dx.$
10. $\int 5^{x^3}x^2dx;\ \int 7^{x^4}x^3dx.$
11. $\int e^{-\frac{x}{4}}dx;\ \int e^{-2x}dx.$
12. $\int e^{2x^2}xdx;\ \int e^{-x^3}x^2dx.$
13. $\int \cos(2-3x)dx;\ \int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$
14. $\int \frac{\sin xdx}{2-\cos x};\ \int \frac{\cos xdx}{3+2\sin x}.$
15. $\int \frac{dx}{x^2-9};\ \int \frac{dx}{2x^2-7}.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}};\ \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};\ \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$
18. $\int \frac{dx}{25+x^2};\ \int \frac{dx}{25+16x^2}.$

Метод підстановки у невизначеному інтегралі

Метод підстановки (заміни змінної) полягає у введенні нової змінної інтегрування, в наслідок чого заданий інтеграл зводиться до табличного або до такого, який легко зводиться до табличного. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. *Нехай* $F(x)$- *первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *тобто* $\int f(x)dx = F(x)+C$, $x\in(a;b)$, *і нехай функція* $x=\varphi(t)$ *визначена і диференційована на проміжку* $(\alpha;\beta)$, *причому множина значень цієї функції є проміжок* $(a;b)$. *Тоді справедлива формула* $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))+C$, $t\in(\alpha;\beta)$.

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int (7-2x)^3 dx$

$$\int (7-2x)^3 dx = \left| \begin{array}{l} 7-2x=u \\ -2dx=du \\ dx=-\dfrac{du}{2} \end{array} \right| = \int u^3 \cdot \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^3 du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+C = -\frac{1}{8}u^4+C = -\frac{1}{8}(7-2x)^4+C.$$

2. $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$

$$\int \frac{dx}{(4-3x)^2} = \int (4-3x)^{-2}dx = \left| \begin{array}{l} 4-3x=t \\ -3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{-3} \end{array} \right| = \int t^{-2}\cdot\left(\frac{dt}{-3}\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}+C =$$

$$= \frac{1}{3t}+C = \frac{1}{3(4-3x)}+C.$$

3. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx$

$$\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}dx = \int (3x+1)^{\frac{2}{3}}dx = \left| \begin{array}{l} 3x+1=a \\ 3dx=da \\ dx=\dfrac{da}{3} \end{array} \right| = \int a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{da}{3} = \frac{1}{3}\int a^{\frac{2}{3}}da = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{5}+C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{5}+C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}=\int\frac{dx}{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}=\int(3x-1)^{-\frac{3}{2}}dx=\left|\begin{matrix}3x-1=t\\3dx=dt\\dx=\dfrac{dt}{3}\end{matrix}\right|=\int t^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}+C=-\frac{2}{3\sqrt{3x-1}}+C.$$

5. $\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx$

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\left|\begin{matrix}2x^3+1=a\\6x^2dx=da\\x^2dx=\dfrac{da}{6}\end{matrix}\right|=\int a^4\cdot\frac{da}{6}=\frac{1}{6}\int a^4da=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^5}{5}+C=\frac{1}{30}a^5+C=\frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C.$$

6. $\int\frac{6z^2dz}{\left(1-2z^3\right)^4}$

$$\int\frac{6z^2dz}{\left(1-2z^3\right)^4}=\int\left(1-2z^3\right)^{-4}6z^2dz=\left|\begin{matrix}1-2z^3=a\\-6z^2dz=da\\6z^2dz=-da\end{matrix}\right|=\int a^{-4}\cdot(-da)=-\int a^{-4}da=-\frac{a^{-3}}{-3}+C=\frac{1}{3a^3}+C=$$

$$=\frac{1}{3\left(1-2z^3\right)^3}+C.$$

7. $\int\sqrt{4x^3+1}x^2dx$

$$\int\sqrt{4x^3+1}x^2dx=\left|\begin{matrix}4x^3+1=a\\12x^2dx=da\\x^2dx=\dfrac{da}{12}\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a}\cdot\frac{da}{12}=\frac{1}{12}\int\sqrt{a}da=\frac{1}{12}\int a^{\frac{1}{2}}da=\frac{1}{12}\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{18}\sqrt{a^3}+C=$$

$$\frac{1}{18}\sqrt{\left(4x^3+1\right)^3}+C.$$

8. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{matrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\\xdx=\dfrac{dt}{2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}+C=\sqrt{x^2+1}+C.$$

9. $\int\frac{x^2dx}{5x^3+1}$

$$\int\frac{x^2dx}{5x^3+1}=\left|\begin{matrix}5x^3+1=a\\15x^2dx=da\\x^2dx=\dfrac{da}{15}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{da}{15}}{a}=\frac{1}{15}\int\frac{da}{a}=\frac{1}{15}\ln|a|+C=\frac{1}{15}\ln\left|5x^3+1\right|+C.$$

10. $\int 3^{5x^2} x dx$

$$\int 3^{5x^2} x dx = \left| \begin{matrix} 5x^2 = t \\ 10xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{10} \end{matrix} \right| = \int 3^t \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\int 3^t dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{1}{10} \cdot \frac{3^{5x^2}}{\ln 3} + C.$$

11. $\int e^{-3x^2+1} xdx$

$$\int e^{-3x^2+1} xdx = \left| \begin{matrix} -3x^2 + 1 = a \\ -6xdx = da \\ xdx = -\dfrac{da}{6} \end{matrix} \right| = \int e^a \cdot \left(-\frac{da}{6} \right) = -\frac{1}{6}\int e^a da = -\frac{1}{6} e^a + C = -\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} + C.$$

12. $\int x^3 \cos x^4 dx$

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \left| \begin{matrix} x^4 = t \\ 4x^3 dx = dt \\ x^3 dx = \dfrac{dt}{4} \end{matrix} \right| = \int \cos t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin x^4 + C.$$

13. $\int \dfrac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$

$$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3} = \left| \begin{matrix} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ x^2 dx = \dfrac{dt}{3} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} tgt + C = \frac{1}{3} tgx^3 + C.$$

14. $\int \dfrac{3^x dx}{\sqrt{25 - 9^x}}$

$$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25 - 9^x}} = \left| \begin{matrix} 3^x = t \\ 3^x \ln 3 dx = dt \\ 3^x dx = \dfrac{dt}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{\ln 3}}{\sqrt{25 - t^2}} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{\sqrt{25 - t^2}} = \frac{1}{\ln 3} \arcsin \frac{t}{5} + C = \frac{1}{\ln 3} \arcsin \frac{3^x}{5} + C.$$

15. $\int \dfrac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$

$$\int \frac{e^x dx}{4 + e^{2x}} = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{4 + t^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg \frac{e^x}{2} + C.$$

Вправи

1. Знайти такі інтеграли (**1 –14**):

   1. $\int (5t - 1)^4 dt;$ $\int (2 - 3x)^5 dx.$

   2. $\int \dfrac{dx}{(4x + 1)^4};$ $\int \dfrac{dz}{(2 - 3z)^5}.$

3. $\int \sqrt{(2x-1)}dx;\ \int \frac{dx}{\sqrt{(4x-7)^3}}.$

4. $\int \left(x^2+3\right)^5 xdx;\ \int 4\left(x^4-1\right)^2 x^3dx.$

5. $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3};\ \int \frac{x^3dx}{\left(5x^4+3\right)^5}dx.$

6. $\int \sqrt{\left(t^4-1\right)^3}t^3dt;\ \int \sqrt{e^x+1}e^xdx.$

7. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^3-1\right)^3}};\ \int \frac{\cos xdx}{\sqrt{1-\sin x}}.$

8. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1};\ \int \frac{\cos xdx}{2\sin x+1}.$

9. $\int 2^{x^4} x^3dx;\ \int 7^{2x^2} xdx.$

10. $\int x^2e^{x^3}dx;\ \int e^{\sin x}\cos xdx.$

11. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;\ \int x\cos\left(x^2+1\right)dx.$

12. $\int \frac{3xdx}{\cos^2 2x^2}dx;\ \int \frac{xdx}{\sin^2 2x^2}.$

13. $\int \frac{4^x dx}{\sqrt{9-16^x}};\ \int \frac{2^x dx}{\sqrt{25-4^x}}.$

14. $\int \frac{\cos xdx}{25+\sin^2 x};\ \int \frac{\sin xdx}{9+\cos^2 x}.$

Метод інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функції , що мають неперервні похідні на деякому проміжку, тоді $d(uv)=udv+vdu, \ \ udv=d(uv)-vdu.$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо $\int udv=\int d(uv)-\int vdu,$ або $\int udv=uv-\int vdu.$ Остання формула називається **формулою інтегрування частинами.** Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int udv$ до обчислення інтеграла $\int vdu.$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, потрібно вдало вибрати u та dv. Щоб інтеграл, що стоїть справа у цій формулі, був простішим. Іноді цю формулу доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx,$ $\int P(x)\sin kxdx,$ $\int P(x)\cos kxdx,$ де $P(x)$ – многочлен , а k – дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;
2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx,$ $\int P(x)\arcsin xdx,$ $\int P(x)\arccos xdx,$ $\int P(x)arctgxdx,$ де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv=P(x)dx$;
3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx,$ $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx,$ де $\alpha,$ β – дійсні числа . Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int x\sin xdx$

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin x & v=-\cos x \end{matrix}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=$$
$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

2. $\int x\cos 2xdx$

$$\int x\cos 2xdx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos 2xdx & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right|=x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x-$$
$$-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x+C=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

3. $\int(2x-5)e^{-3x}dx$

$$\int(2x-5)e^{-3x}dx=\left|\begin{matrix} u=2x-5 & du=2dx \\ dv=e^{-3x}dx & v=-\frac{1}{3}e^{-3x} \end{matrix}\right|=(2x-5)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\cdot 2dx=$$
$$-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot(2x-5)+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot(2x-5)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}+C=-\frac{e^{-3x}}{3}\left(2x-5+\frac{2}{3}\right)+C=$$
$$=-\frac{e^{-3x}}{9}(6x-13)+C=\frac{e^{-3x}}{9}(13-6x).$$

4. $\int(3x-4)\ln xdx$

$$\int(3x-4)\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=(3x-4)dx & v=\frac{3x^2}{2}-4x\end{matrix}\right|=\ln x\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-4x\right)-\int\left(\frac{3x^2}{2}-4x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$\left(\frac{3x^2}{2}-4x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{3x}{2}-4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-4x\right)\cdot\ln x-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+4x+C=\left(\frac{3x^2}{2}-4x\right)\cdot\ln x-\frac{3x^2}{4}+4x+C.$$

5. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=\left|\begin{matrix} u=\arcsin\sqrt{x} & du=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}dx \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{1-x}} & v=-2\sqrt{1-x}\end{matrix}\right|=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\;-\int\left(-2\sqrt{1-x}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}dx=$$

$$=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}\;+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C=2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+C.$$

6. $\int\arccos x dx$

$$\int\arccos x dx=\left|\begin{matrix} u=\arccos x & du=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\cdot\arccos x-\int x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=x\cdot\arccos x+$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{matrix} 1-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{2}\end{matrix}\right|=x\cdot\arccos x+\int\frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=x\cdot\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}==x\cdot\arccos x-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=$$

$$x\cdot\arccos x-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}+C=x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

7. $\int x arctgx dx$

$$\int x arctgx dx=\left|\begin{matrix} u=arctgx & du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}\left(x-arctgx\right)+C=$$

$$\frac{x^2}{2}\cdot arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C=\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C.$$

8. $\int e^x\sin 2x dx$

$$\int e^x \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = e^x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x \right) \cdot e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}e^x \sin 2x - \int \frac{1}{2}e^x \sin 2x dx \right) = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x \text{-} \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx,$$

Звідки $\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x \text{-} \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx.$

Дістали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл:

$$\int e^x \sin 2x dx + \frac{1}{4}\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x.$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x + C.$$

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}e^x \cos 2x + \frac{1}{4}e^x \sin 2x \right) + C.$$

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{2}{5}e^x \cos 2x + \frac{1}{5}e^x \sin 2x + C = \frac{1}{5}e^x \left(\sin 2x - 2\cos 2x \right) + C.$$

Вправи

1. Знайти такі інтеграли (**1 – 6**):

   1. $\int x \cos x dx;\ \int (1-x)\sin x dx$
   2. $\int x \sin 2x x dx;\ \int x \cos 3x dx$
   3. $\int x e^x dx;\ \int x^2 e^{3x} dx$
   4. $\int x \ln x dx;\ \int \left(4x^3 + 6x - 7\right)\ln x dx$
   5. $\int \arcsin x dx;\ \int arctgx dx$
   6. $\int e^x \cos x dx;\ \int e^x \sin x dx$

Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца.

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену на відрізку $[a;b]$. Відрізок $[a;b]$ поділимо на n рівних за довжиною відрізків.

У кожному з цих відрізків $[x_{i-1};x_i]$, $i=1,...,n,$ довільно візьмемо по одній точці і позначимо її ξ_i; $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. Тоді сума

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, називається **інтегральною сумою функції** $f(x)$.

Очевидно, ця сума залежить і від того, як поділено відрізок $[a;b]$, і від того , як взято точки ξ_i.

Якщо границя $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ існує і не залежить від вибору точок ξ_i , то **функція** $f(x)$ **називається інтегрованою** на відрізку $[a;b]$, а границя називається **інтегралом від функції** f **на відрізку** $[a;b]$ його позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким чином за означенням: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Властивості визначених інтегралів

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$
2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$
3. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то справедлива рівність (адитивність визначеного інтеграла):
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
5. Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:
$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$
6. Визначений інтеграл від суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:
$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
7. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x) \le g(x)$ $(a<b)$, то
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл $F(x)$, є **формула Ньютона – Лейбніца:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

Тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межах інтегрування.

Приклад 1. Обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int_2^3 x^2 dx$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

2. $\int_{-1}^2 \left(x^2 + 2x + 1\right) dx$

$$\int_{-1}^2 \left(x^2 + 2x + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + (-1)\right) = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2\right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) = \frac{8}{3} + 4 + 2 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = 9.$$

3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}(1-4) = \frac{3}{2}.$$

4. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_8^{27} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_8^{27} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_8^{27} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\Bigg|_8^{27} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}\right) = \frac{3}{2}(9-4) = \frac{15}{2}.$$

5. $\int_1^3 e^{2x} dx$

$$\int_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 3} - e^{2\cdot 1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^6 - e^2\right) = \frac{e^2}{2}\left(e^4 - 1\right).$$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln|1+2| - \ln|0+2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\cos 4\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 4\cdot 0\right) = -\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

9. $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

10. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Вправи

1. Обчислити такі визначені інтеграли (**1 – 10**):

1. $\int\limits_1^2 x^3dx;\ \int\limits_1^3 x^4dx.$
2. $\int\limits_{-2}^3 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right)dx;\ \int\limits_{-1}^0 \left(x^3 + 2x\right)dx.$
3. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2};\ \int\limits_0^4 \sqrt{x}dx.$
4. $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx;\ \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$
5. $\int\limits_{-1}^1 e^x dx;\ \int\limits_0^1 e^{3x}dx.$
6. $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x};\ \int\limits_2^3 \frac{dx}{x-1}.$
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin xdx;\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2xdx.$
8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\cos^2 x};\ \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$
9. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};\ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$
10. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2};\ \int\limits_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}.$

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної

При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної (способом підстановки) визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ перетворюється за допомогою підстановки $u=\psi(x)$ або $x=\varphi(u)$ у визначений інтеграл відносно нової змінної u. При цьому старі межі інтегрування a і b замінюють відповідно новими межами інтегрування α і β. Які знаходять з відповідної підстановки.

З першої підстановки нові межі інтегрування обчислюють безпосередньо: $\alpha=\psi(a),\ \ \beta=\psi(b)$.

З другої підстановки нові межі інтегрування знаходять, розв'язавши рівняння $a=\varphi(\alpha)$ і $b=\varphi(\beta)$ відповідно α і β.

Таким чином, маємо $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(u)\right]\varphi'(u)\,du=\int\limits_\alpha^\beta F(u)du.$

Приклад 1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли:

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}=\left|\begin{array}{ll} 3x+1=t & t_1=3\cdot 0+1=1 \\ 3dx=dt & t_1=3\cdot 1+1=4 \\ dx=\dfrac{dt}{3} & \end{array}\right|=\int\limits_1^4 \frac{\frac{dt}{3}}{t^4}=\int\limits_1^4 \frac{dt}{3t^4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\Bigg|_1^4=-\frac{1}{9t^3}\Bigg|_1^4=-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{1^3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{64}-1\right)=-\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{63}{64}\right)=\frac{7}{64}.$$

2. $\int\limits_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$

$$\int\limits_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}=\int\limits_{-2}^5 (x+3)^{-\frac{2}{3}}dx=\left|\begin{array}{ll} x+3=t & t_1=-2+3=1 \\ dx=dt & t_2=5+3=8 \end{array}\right|=\int\limits_1^8 t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_1^8=\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_1^8=3t^{\frac{1}{3}}\Big|_1^8=3\sqrt[3]{t}\Big|_1^8=$$

$$=3\cdot\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}\right)=3\cdot 1=3.$$

3. $\int\limits_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx$

$$\int\limits_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx=\left|\begin{array}{l} 2x^3+1=a;\quad 6x^2dx=da;\quad x^2dx=\dfrac{da}{6}; \\ a_1=2\cdot 0^3+1=1;\qquad a_2=2\cdot 1^3+1=3 \end{array}\right|=\int\limits_1^3 a^4\cdot\frac{da}{6}=\frac{1}{6}\int\limits_1^3 a^4da=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^5}{5}\Bigg|_1^3=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{242}{30}=\frac{121}{15}=8\frac{1}{15}.$$

4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} 3\sin x+1=z & z_1=3\sin 0+1=1 \\ 3\cos x dx=dz & z_2=3\sin\frac{\pi}{2}+1=4 \\ \cos x dx=\frac{dz}{3} & \end{array} \right| = \int_1^4 \sqrt{z}\cdot\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot z^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\sqrt{z^3}\Big|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{9}\cdot(8-1) = \frac{14}{9}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3-\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3-\cos x} = \left| \begin{array}{ll} 3-\cos x=t & t_1=3-\cos 0=2 \\ \sin x dx=dt & t_1=3-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2} \end{array} \right| = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln\frac{5}{2}-\ln 2 = \ln\frac{5}{4}.$$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} e^{\sin x}=u & u_1=e^{\sin 0}=e^0=1 \\ e^{\sin x}\cos x dx=du & u_1=e^{\sin\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{e}} du = u\Big|_1^{\sqrt{e}} = \sqrt{e}-1.$$

7. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{ll} 2x=t & t_1=2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6} \\ 2dx=dt & t_2=2\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4} \\ dx=\frac{1}{2}dt & \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$$

8. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{ll} \frac{x}{2}=u; \quad \frac{dx}{2}=du; & dx=2du; \\ u_1=\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}; & u_2=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2du}{\cos^2 u} = 2tgu\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{2\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}.$$

9. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} 4-9x^2 = 4\left(1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2\right); \\ u = \frac{3x}{2}; \quad du = \frac{3}{2}dx; \quad dx = \frac{2}{3}du; \\ u_1 = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad u_2 = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{2}{3}du}{\sqrt{4\left(1-u^2\right)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36}.$$

10. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$

$$\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2} = \left| \begin{array}{l} 9+16x^2 = 9\left(1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2\right); \\ \frac{4x}{3} = u; \quad \frac{4dx}{3} = du; \quad dx = \frac{3}{4}dx; \\ u_1 = \frac{4\cdot\frac{3}{4}}{3} = 1; \quad u_2 = \frac{4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}}{3} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{4\cdot\frac{3}{4}dx}{9\cdot\left(1+u^2\right)} = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+u^2} = \frac{1}{3}arctgu\Big|_{1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(arctg\sqrt{3} - arctg1\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36}.$$

Вправи

1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли (**1 – 10**):

1. $\int\limits_{2}^{3} \left(2x-1\right)^3 dx;$ $\int\limits_{4}^{5} \left(4-x\right)^3 dx.$

2. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt[3]{3x-1}dx;$ $\int\limits_{0}^{5} \sqrt{3x+1}dx.$

3. $\int\limits_{-1}^{2} \left(x^2-1\right)^3 xdx;$ $\int\limits_{0}^{2} 9\sqrt{x^3+1}x^2dx.$

4. $\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\sin xdx;$

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1+\sin z}\cos zdz.$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x};$ $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3x^2dx}{1+x^3}.$

6. $\int\limits_{0}^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}dx$; $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}xdx$.

7. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 3xdx$.

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$.

9. $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{9-2x^2}}$.

10. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \frac{dx}{1+2x^2}$; $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{4dx}{2+9x^2}$.

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ та їх похідні $u'(x)$ та $v'(x)$ неперервні в проміжку $[a;b]$, то формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд: $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$

Приклад 1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли:

1. $\int\limits_0^{2\pi} x\cos 2xdx$

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos xdx & v = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sin xdx = \left(2\pi\cdot\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0\right) +$$

$$+\cos x\Big|_0^{2\pi} = (0-0) + \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

2. $\int\limits_e^4 x\ln xdx$

$$\int\limits_e^4 x\ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_e^4 - \int\limits_e^4 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \left(\frac{4^2}{2}\cdot\ln 4 - \frac{e^2}{2}\cdot\ln e\right) - \frac{1}{2}\int\limits_e^4 xdx =$$

$$\left(8\ln 4 - \frac{e^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_e^4 = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(4^2 - e^2\right) = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}.$$

Вправи

1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли (**1 – 4**):

1. $\int\limits_0^1 \arcsin xdx.$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx.$

3. $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arc}\,tgxdx.$

4. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$