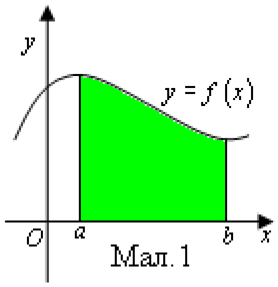
Застосування визначеного інтеграла

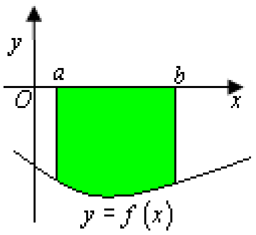
1. Площа плоскої фігури

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $y=f(x)$ $\left(f(x)\geq 0\right)$, прямими $x=a$ і $x=b$ та віссю Ox, то її площу обчислюється за формулою $S=\int\limits_a^b f(x)dx.$



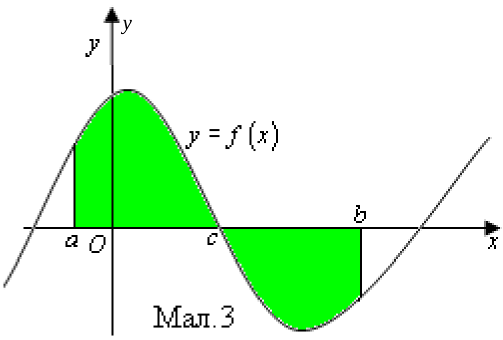
Мал.1

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, лежить під віссю Ox, то площу знаходять за формулою $S=\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx.$



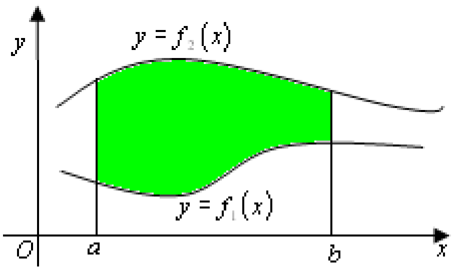
Мал.2

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y=f(x)$, віссю Ox і прямими $x=a$ і $x=b$, розміщена з обох боків від осі Ox, то площу знаходять за формулою $S=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b \left|f(x)\right|dx.$



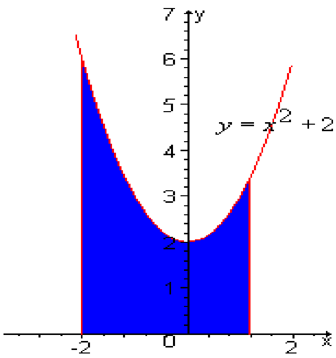
Мал.3

Якщо фігура обмежена двома кривими, що перетинаються, з яких $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, і прямими $x=a$ і $x=b$, де $a\leq x\leq b$ і $f_1(x)\leq f_2(x)$, тоді її площу знаходимо за формулою $S=\int\limits_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$



Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених вказаними лініями:

1. $y=x^2+2;\quad y=0;\quad x_1=-2;\quad x_2=1.$



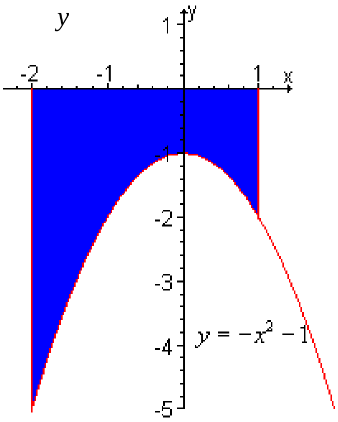
Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями. У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою $y=x^2+2$, прямими $x_1=-2;\quad x_2=1$ та віссю Ox, тому маємо:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(\frac{(-2)^3}{3}+2\cdot(-2)\right)-\left(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1\right)=\frac{8}{3}-4-\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}-2=$$

$$=2\frac{1}{3}-2=\frac{1}{3}(\text{êâ.î ä.})$$

2. $y=-x^2-1;\quad x_1=-2;\quad x_2=1.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



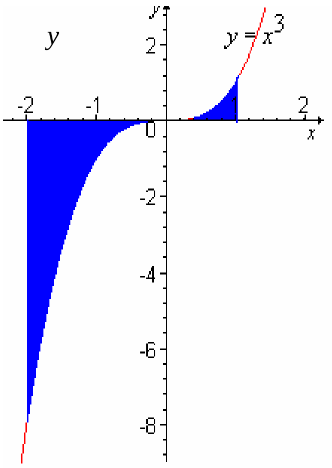
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена під віссю Ox, тому маємо:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|-x^2-1\right|dx=\left|-\frac{x^3}{3}-x\right|\Bigg|_{-2}^{1}=\left|-\frac{(-2)^3}{3}-1\cdot(-2)\right|-$$

$$-\left|\frac{0^3}{3}+1\cdot 0\right|=\frac{8}{3}+2-0-0=2\frac{2}{3}+2=4\frac{2}{3}(\text{кв.од.})$$

3. $y=x^3;\quad x_1=-2;\quad x_2=1.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



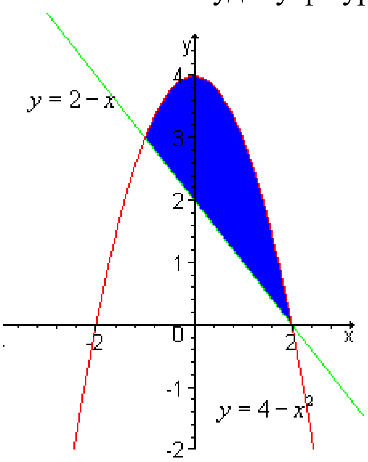
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена з обох боків від осі Ox, тому маємо:

$$S=\int_{-2}^{0}\left|x^3\right|dx+\int_{0}^{1}x^3dx=\left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right|+\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}=\left|\frac{0^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right|+\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=$$

$$=\frac{16+1}{4}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}(\text{кв.од.})$$

4. $y=4-x^2;\quad y=2-x.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



Для визначення точок перетину заданих ліній розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=2-x. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $4-x^2=2-x;$

$$x^2-x-2=0;$$

$$x_1=-1;\quad x_2=2.$$

Тоді обчислимо площу шуканої фігури:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(4-x^2-(2-x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(2+x-x^2\right)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(2\cdot 2+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(2\cdot(-1)+\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=4+2-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=4,5(\text{кв.од.})$$

2. Об’єм тіла обертання

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a,\ x=b,\ y=0,$ обчислюється за формулою $V_x=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)\ge 0$ і прямими $y=c,\ y=d,\ x=0,$ то об’єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, знаходять за формулою $V_y=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy.$

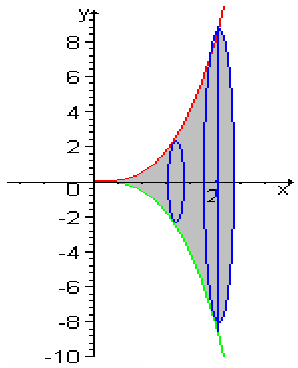
Якщо навколо осі Ox обертається фігура, обмежена кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, $f_2(x)\ge f_1(x)\ge 0,$ і прямими $x=a,\ x=b,$ то об’єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою $V_x=\pi\int\limits_a^b \left(f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x)\right)dx.$

Якщо навколо осі Oy обертається фігура, обмежена кривими $x=\varphi_1(y),x=\varphi_2(y),\varphi_2(y)\ge\varphi_1(y)\ge 0,$ і прямими $y=c,\ y=d,$ то об’єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою $V_y=\pi\int\limits_c^d\left(\varphi_2^{\,2}(y)-\varphi_1^{\,2}(y)\right)dy.$

Приклад 2. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1. $y=x^3;\ \ y=0;\ \ x_1=0;\ \ x_2=2,$ навколо осі Ox.

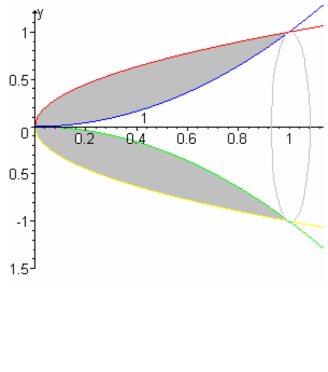
Зобразимо тіло, утворене внаслідок обертання фігури, яка обмежена заданими лініями, та обчислимо його об’єм



$$V=\pi\int\limits_0^2\left(x^3\right)^2dx=\pi 2dx=\pi\left.\frac{x^7}{7}\right|_0^2=\frac{\pi}{7}\left(2^7-0^7\right)=$$

$$=\frac{\pi}{7}\cdot(128-0)=\frac{128\pi}{7}(\text{куб.од.})$$

2. $y=x^2;\ \ y=\sqrt{x},$ навколо осі Ox.

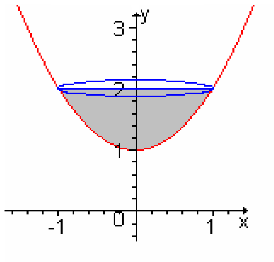


$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)dx=$$

$$=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=\pi\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^5}{5}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^5}{5}\right)\right]=$$

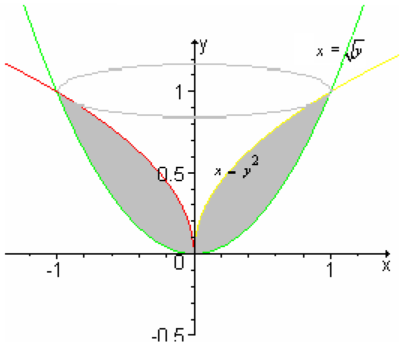
$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-0+0\right)=\frac{3\pi}{10}(\text{куб.од.}).$$

3. $y = x^2 + 1;\quad y = 2,$ навколо осі Oy.



$$V = \pi\int_1^2 \left(\sqrt{y-1}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 (y-1)dx = \pi\left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_1^2 =$$
$$= \pi\left(\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)\right) = \pi\left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2}(\text{куб.од.})$$

4. $y = x^2;\quad x = y^2,$ навколо осі Oy.



$$V = \pi\int_0^1 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(y^2\right)^2\right)dy = \pi\int_0^1 \left(y - y^4\right)dx =$$
$$= \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5}\right)\right] =$$
$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 0 + 0\right) = \frac{3\pi}{10}(\text{куб.од.}).$$

3. Довжина дуги кривої

Якщо функції f і f' неперервні на відрізку $[a;b]$, то довжина відповідної дуги кривої обчислюється за формулою $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$

Якщо криву задано рівнянням $x = \varphi(y)$ $(c \le y \le d)$, то довжину дуги обчислюють за формулою $l = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy$

Приклад 3. Обчислити довжину напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ між точками з абсцисами $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$.

Диференціюючи рівняння кривої, знаходимо $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, тоді

$1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 = 1 + \frac{9}{4}x.$ Довжину відповідної дуги кривої обчислюємо за формулою, тобто маємо: $l = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 =$

$$= \frac{8}{27}\cdot\left(\left(1 + \frac{9}{4}\cdot 2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9}{4}\cdot 1\right)^{\frac{3}{2}}\right) == \frac{1}{27}\cdot\left(22\sqrt{22} - 13\sqrt{13}\right).$$

Приклад 4. Обчислити довжину дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = \sqrt{3}$.

Диференціюючи рівняння кривої, знаходимо $y' = x$, тоді $1+\left(f'(x)\right)^2 = 1+x^2$. Довжину відповідної дуги кривої обчислюємо за формулою, тобто маємо: $l = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx$

Знайдемо невизначений інтеграл

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{1+x^2} & du = \dfrac{2xdx}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - ,$$

$$-\int \frac{\left(1+x^2\right)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$2\int \sqrt{1+x^2}\,dx = x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо, що $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$ Тому

$$l = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}+\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right|\right) -$$

$$-\left(\frac{0}{2}\sqrt{1+0^2} + \frac{1}{2}\ln\left|0+\sqrt{1+0^2}\right|\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}+2\right|\right) - 0 = \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}+2\right| = 2{,}391 \text{ (од.довж.).}$$

4. Площа поверхні обертання

Площа поверхні, що утворюється при обертанні навколо осі Ox кривої $y = f(x)$, $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$, а функції f і f' неперервні на відрізку $[a;b]$ обчислюється за формулою $P = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

Приклад 5. Обчислити площу поверхні , утвореної обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди від $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$.

Оскільки $y = \sin x$, а $y' = \cos x$, то площу поверхні , утвореної обертанням навколо осі Ox дуги синусоїди буде рівною

$$P = 2\pi\int\limits_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx = 2\pi\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+(\cos x)^2}\,d(\cos x) = \begin{vmatrix} \cos x = t \\ t_1 = \cos 0 = 1 \\ t_1 = \cos\pi = -1 \end{vmatrix} =$$

$$2\pi\int\limits_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+1^2} + \frac{1}{2}\ln\left|1+\sqrt{1+1^2}\right| - \left(\frac{-1}{2}\sqrt{1+(-1)^2} + \frac{1}{2}\ln\left|(1)+\sqrt{1+(-1)^2}\right|\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right) = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

5. Обчислення шляху, пройденого точкою

Шлях, пройдений точкою при нерівномірному русі по прямій із змінною швидкістю $v = f(t) \geq 0$ за проміжок часу від t_1 до t_2, обчислюється за формулою $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

Приклад 6. Швидкість руху точки $v = 24t - 6t^2$ (м/с). Знайдіть: 1) шлях, пройдений точкою за 3 с від початку руху; 2) шлях, пройдений точкою за третю секунду; 3) шлях, пройдений точкою від початку руху до її зупинки.

1) Згідно з умовою $f(t) = 24t - 6t^2$, $t_1 = 0$, $t_2 = 3$. Тому за формулою знаходимо

$$s = \int\limits_0^3 \left(24t - 6t^2\right)dt = \left(12t^2 - 2t^3\right)\Big|_0^3 = \left(12 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3\right) - \left(12 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3\right) = 108 - 54 = 54 \ (\text{м}).$$

2) В даному випадку маємо, що $f(t) = 24t - 6t^2$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Тому маємо $s = \int\limits_2^3 \left(24t - 6t^2\right)dt = \left(12t^2 - 2t^3\right)\Big|_2^3 = \left(12 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3\right) - \left(12 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3\right) = (108 - 54) -$ $-(48 - 16) = 54 - 32 = 22 \ (\text{м})$.

3) Швидкість точки дорівнює нулю в момент початку руху та в момент зупинки. Визначимо, в який момент точка зупиниться: для цього розв'яжемо рівняння $24t - 6t^2 = 0$, звідки $t(4 - t) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$. Тоді за формулою маємо

$$s = \int\limits_0^4 \left(24t - 6t^2\right)dt = \left(12t^2 - 2t^3\right)\Big|_0^4 = \left(12 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^3\right) - \left(12 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3\right) = 192 - 128 = 64 \ (\text{м}).$$

Приклад 7. Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямі по прямій. Перше тіло рухається з швидкістю $v = 6t^2 + 2t$ (м/с), а друге – з швидкістю $v = 4t + 5$ (м/с). На якій відстані одне від одного вони будуть через 5 с?

Очевидно, що шукана величина є різницею відстаней, пройдених першим і другим тілами за 5 с:

$$s_1 = \int\limits_0^5 \left(6t^2 + 2t\right)dt = \left(2t^3 + t^2\right)\Big|_0^5 = \left(2 \cdot 5^3 + 5^2\right) - \left(2 \cdot 0^3 + 0^2\right) = 250 + 25 - 0 = 275 \ (\text{м}).$$

$$s_2 = \int\limits_0^5 (4t + 5)dt = \left(2t^2 + 5t\right)\Big|_0^5 = \left(2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5\right) - \left(2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0\right) = 50 + 25 - 0 = 75 \ (\text{м}).$$

$s = s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200$ м.

Приклад 8. Два тіла почали рухатися по прямій з однієї і тієї ж точки. Перше тіло рухається з швидкістю $v = 3t^2 - 6t$ (м/с), а друге – з швидкістю $v = 10t + 20$ (м/с). В який момент часу і на якій відстані від початкової точки вони зустрінуться?

Згідно з умовою задачі, тіла почали рухатися з однієї і тієї ж точки, тому відстані, пройдені ними до зустрічі, рівні. Знайдемо закони руху кожного з тіл: $s_1 = \int \left(3t^2 - 6t\right)dt = t^3 - 3t^2$; $s_2 = \int (10t + 20)dt = 5t^2 + 20t$.

Сталі інтегрування при початкових умовах $t = 0$, $s = 0$ дорівнюють нулю. Ці тіла зустрічаються при умові $s_1 = s_2$, звідки $t^3 - 3t^2 = 5t^2 + 20t$, або $t^3 - 8t^2 - 20t = 0$.

Розв'яжемо це рівняння: $t\left(t^2 - 8t - 20\right) = 0$, тобто $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, $t_3 = 10$. Отже, ці тіла зустрінуться в момент $t = 10$ с.

Підставивши значення $t=10$ с у рівність, яка визначає закон руху будь-якого з тіл, знайдемо відстань, пройдену кожним тілом до зустрічі: $s_1=s_2=t^3-3t^2=10^3-3\cdot 10^2=1000-300=700$ (м).

Приклад 9. Тіло кинуто з поверхні землі вертикально вгору з швидкістю $v=39,2-9,8t$ (м/с). Знайти найбільшу висоту піднімання тіла.

Тіло досягне найбільшої висоти в такий момент часу, коли $v=0$, тобто $39,2-9,8t=0$, звідки $t=4$ с. За формулою знаходимо

$$s=\int_0^4 (39,2-9,8t)\,dt=\left(39,2t-9,8t^2\right)\Big|_0^4=\left(39,2\cdot 4-9,8\cdot 4^2\right)-\left(39,2\cdot 0-9,8\cdot 0^2\right)=78,4\ (\text{м}).$$

6. Обчислення роботи сили

Роботу, виконану змінною силою $F(x)$ при переміщенні по осі Ox матеріальної точки від $x=a$ до $x=b$, визначається за формулою $A=\int_a^b F(x)dx$

При розв'язуванні задач на обчислення роботи часто використовують закон Гука $F=kx$, де F – сила, x – абсолютне видовження пружини, спричинене силою F, а k – коефіцієнт пропорційності.

Приклад 10. Стиск x гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі F. Обчислити роботу сили F при стисканні пружини на $0,04$ м, якщо для стискання її на $0,01$ м потрібна сила 10 Н.

Оскільки $x=0,01$ м при $F=10$ Н, то підставляючи ці значення в закон Гука, дістанемо $10=k\cdot 0,01$, звідки $k=1000$ Н/м. Підставивши тепер у цю ж рівність значення k, знаходимо $F=1000x$. Шукану роботу знайдемо за формулою, припустивши, що $a=0,\ \ b=0,04$:

$$A=\int_0^{0,04} 1000x\,dx=1000\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04}=500\,x^2\Big|_0^{0,04}=500\cdot\left(0,04^2-0^2\right)=0,8\ (\text{Дж}).$$

Приклад 11. Пружина в спокійному стані має довжину $0,2$ м. Сила в 50 Н розтягує пружину на $0,01$ м. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути її від $0,22$ м до $0,32$ м?

Використавши закон Гука, дістанемо $50=k\cdot 0,01$, звідки $k=5000$ Н/м. Знаходимо межі інтегрування: $a=0,22-0,2=0,02,\ \ b=0,32-0,2=0,12.$ Тепер за формулою дістаємо:

$$A=\int_{0,02}^{0,12} 5000x\,dx=5000\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0,02}^{0,12}=2500\,x^2\Big|_{0,02}^{0,12}=2500\cdot(0,0144-0,0004)=35\ (\text{Дж}).$$

Приклад 12. Для стискання пружини на $0,05$ м виконують роботу в 25 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на $0,1$ м?

Знаючи величину стискання пружини – $0,05$ м та виконану при цьому роботу – 25 Дж, можемо знайти значення k – коефіцієнта пропорційності, тобто

$$25=\int_0^{0,05} kx\,dx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,05}=\frac{k}{2}\cdot\left(0,05^2-0^2\right)=0,00125k.$$

Звідки $k=\dfrac{25}{0,00125}=20000$ (Н/м).

Тепер за цією ж формулою знаходимо

$$A=\int_0^{0,1}20000xdx=20000\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,1}=10000\,x^2\Big|_0^{0,1}=10000\cdot\left(0,1^2-0^2\right)=100\ \left(\text{Дж}\right).$$

Приклад 13. Щоб розтягнути пружину на $0,04$ м треба виконати роботу в 20 Дж. На яку довжину можна розтягнути пружину, виконавши роботу в 80 Дж?

Знаючи величину розтягу пружини – $0,04$ м та виконану при цьому роботу – 20 Дж, можемо знайти значення k – коефіцієнта пропорційності, тобто

$$20=\int_0^{0,04}kxdx=k\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04}==\frac{k}{2}\left(0,04^2-0^2\right)=0,0008k.$$

Звідки $k=\dfrac{20}{0,0008}=25000\ \left(\text{Н/м}\right).$

Нехай x – величина розтягу пружини, яка відповідає виконаній при цьому роботі в 80 Дж . Тоді

$$80=\int_0^{x}25000xdx=25000\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x}=12500\,x^2\Big|_0^{x}=12500\cdot\left(x^2-0^2\right)=12500x^2,\text{ звідки}$$

$$x^2=\frac{80}{12500}=\frac{4}{625};\quad x=\frac{2}{25}=0,08\ \left(\text{м}\right).$$

7. Обчислення маси прямолінійного стержня

Маса прямолінійного стержня на ділянці від l_1 до l_2 із змінною густиною $\rho\left(l\right)$ визначається за формулою $m=\int\limits_{l_1}^{l_2}\rho\left(l\right)dl$

Приклад 14. Обчислити масу прямолінійного стержня, якщо його лінійна густина $\rho\left(l\right)=2l+3\ \left(\text{кг/м}\right),\ 0\le l\le 10.$

Застосувавши формулу одержимо масу стержня:

$$m=\int_0^{10}\left(2l+3\right)dl=\left(l^2+3l\right)\Big|_0^{10}=\left(10^2+3\cdot 10\right)-\left(0^2+3\cdot 0\right)=130\ \left(\text{кг}\right).$$

8. Обчислення кількості електрики

Кількість електрики Q, що проходить через поперечний переріз провідника із змінним струмом $I\left(t\right)$ за час від t_1 до t_2 обчислюється за формулою $Q=\int\limits_{t_1}^{t_2}I\left(t\right)dt$

Приклад 15. Протягом 5 с сила струму в провіднику змінювалася за законом $I\left(t\right)=6t^2+3\ \left(\text{А}\right)$. Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час?

Застосувавши формулу одержимо кількість електрики Q:

$$Q=\int_0^{5}\left(6t^2+3\right)dt=\left(2t^3+3t\right)\Big|_0^{5}=\left(6\cdot 5^3+3\cdot 5\right)-\left(6\cdot 0^3+3\cdot 0\right)=265\ \left(\text{Кл}\right).$$

9. Обчислення сили тиску рідини

З фізики відомо, що тиск рідини на горизонтальну площадку, занурену в рідину, визначається за законом Паскаля: тиск p рідини на площадку дорівнює її площі S, помноженій на глибину занурення H, густину рідини ρ і на прискорення вільного падіння g: $p=\rho gHS$

Сила тиску P на пластинку висотою H, занурену вертикально у рідину, визначається за формулою $P=\rho g\int_a^b xydx$

Приклад 16. Визначити силу тиску води на стінки шлюзу, довжина якого 20 м, а висота 5 м, якщо шлюз доверху заповнений водою.

В нашому випадку $y=f(x)=20,\ a=0,\ \ b=5,\ \ \rho=1000$ кг/м^3. Застосовуючи формулу одержимо:

$$P=9,8\cdot1000\cdot\int_0^5 20xdx=9800\cdot20\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^5=98000\cdot\left(5^2-0^2\right)=2450000\ (\text{Н}).$$

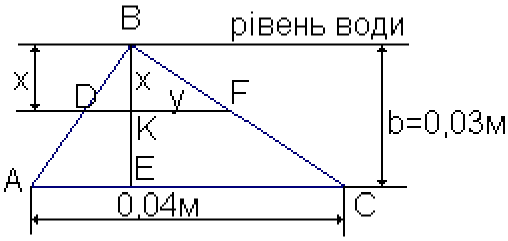
Приклад 17. В воду опущена прямокутна пластинка, яка розміщена вертикально. Її горизонтальна сторона дорівнює 1 м, вертикальна 2 м. Верхня сторона знаходиться на глибині 0,5 м. Визначити силу тиску води на пластинку.

В даному випадку $y=f(x)=1,\ a=0,5\ \ b=2+0,5=2,5\ \ \rho=1000$ кг/м^3.
Застосовуючи формулу одержимо:

$$P=9,8\cdot1000\cdot\int_{0,5}^{2,5} xydx=9,8\cdot1000\cdot\int_{0,5}^{2,5} xdx=9800\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{0,5}^{2,5}=9800\cdot\frac{2,5^2-0,5^2}{2}=29400(\text{Н}).$$

Приклад 18. Пластинка, яка має форму трикутника з основою 4 см, а висотою 3 см, занурена вертикально у воду. Знайти силу тиску води на цю пластинку, якщо її вершина лежить на поверхні води.

Знову застосуємо формула, в якій $a=0,\ \ b=3$ см=0,03 м, $|AC|=4\text{см}=0,04$ м, $\rho=1000$ кг/м^3. З подібності трикутників DBF та ACB маємо

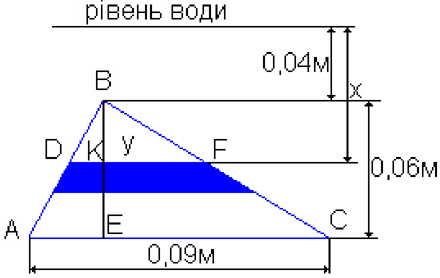


$\dfrac{|DF|}{|AC|}=\dfrac{|BK|}{|BE|}$, або $\dfrac{y}{0,04}=\dfrac{x}{0,03}$. Звідси, $y=\dfrac{0,04x}{0,03}$, або $y=\dfrac{4x}{3}$. Підставимо одержані дані у формулу та отримаємо:

$$P=9,8\cdot1000\int_0^{0,03} x\cdot\frac{4x}{3}dx=9,8\cdot1000\cdot\frac{4}{3}\int_0^{0,03} x^2dx=$$

$$=\frac{9800\cdot4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{0,03}=\frac{9800\cdot4}{3}\cdot\frac{0,03^3-0^3}{3}=0,1176\ (\text{Н}).$$

Приклад 19. Трикутник з основою 9 см, а висотою 6 см повністю занурений уводу, причому його основа паралельна поверхні води, а на 4 см нижче її поверхні. Знайти силу тиску води на трикутник.



З подібності трикутників DBF та ABC маємо $\dfrac{|DF|}{|AC|}=\dfrac{|BK|}{|BE|}$, або $\dfrac{y}{0,09}=\dfrac{x-0,04}{0,06}$. Звідси, $y=\dfrac{0,09}{0,06}(x-0,04)$, або $y=\dfrac{3}{2}(x-0,04)$. Знову застосуємо формула, в якій $a=0,04$ м $\ b=0,06+0,04$=0,1 м, $\rho=1000$ кг/м^3.
Підставимо одержані дані у формулу та отримаємо:

$$P=9{,}8\cdot 1000\int\limits_{0,04}^{0,1}\frac{3\left(x-0{,}04\right)}{2}\cdot xdx=9{,}8\cdot 1000\cdot\frac{3}{2}\int\limits_{0,04}^{0,1}\left(x^2-0{,}04x\right)dx=9{,}8\cdot 1000\cdot\frac{3}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{x^3}{3}-0{,}04\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,04}^{0,1}=9{,}8\cdot 1000\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\left(\frac{0{,}1^3}{3}-0{,}04\cdot\frac{0{,}1^2}{2}\right)-\left(\frac{0{,}04^3}{3}-0{,}04\cdot\frac{0{,}04^2}{2}\right)\right)=$$

$$=2{,}1189\ (\text{Н}).$$

Приклад 20. Циліндричний стакан наповнено олією. Обчисліть силу тиску олії на бічну поверхню стакана, якщо висота його $h=0{,}08$ м і радіус основи $r=0{,}04$ м. густина олії 900 кг/м^3.

Обчислимо площу бічну поверхню стакана: $S=2\pi Rh=2\pi\cdot 0{,}04h=$ $=0{,}08\pi h.$ Знову застосуємо формула, в якій $a=0$ $b=0{,}08$ м, $\rho=900$ кг/м^3, підставимо одержані дані у формулу та отримаємо:

$$P=9{,}8\cdot 900\int\limits_0^{0,08}0{,}08\pi xdx=9{,}8\cdot 900\cdot 0{,}08\pi\int\limits_0^{0,08}xdx=9{,}8\cdot 9000\cdot 0{,}08\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,08}=$$

$$=9{,}8\cdot 900\cdot 0{,}08\pi\cdot\left(\frac{0{,}08^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=7{,}1\ (\text{Н}).$$

10. Обчислення роботи сили, яка виконується при підніманні вантажу

З фізики відомо, що робота A, яку треба виконати, щоб підняти шар води вагою P на висоту x, дорівнює Px. Робота сили, яка виконується при підніманні вантажу обчислюється за формулою $A=\rho g\int\limits_0^h Sxdx$

Приклад 21. Циліндрична цистерна з радіусом основи $r=0{,}5$ м і висотою $h=2$ м заповнена водо

В нашому випадку $S=\pi r^2=0{,}5^2\pi=0{,}25\pi,$ $\rho=1000$ кг/м^3, $h=2$ м.
Застосувавши формулу, одержимо

$$A=1000\cdot 9{,}8\int\limits_0^2\pi\cdot 0{,}5^2xdx=1000\cdot 9{,}8\cdot\pi\cdot 0{,}5^2\int\limits_0^2xdx=1000\cdot 9{,}8\cdot\pi\cdot 0{,}5^2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=1000\cdot 9{,}8\cdot\pi\cdot 0{,}5^2\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=15409{,}5\ (\text{Дж}).$$

11. Знаходження центра ваги дуги плоскої кривої і центра ваги однорідної трапеції

Статистичні моменти M_x і M_y дуги плоскої кривої $y=f\left(x\right),$ $a\le x\le b,$ яка сполучає точки $A\big(a,f\left(a\right)\big)$ та $B\big(b,f\left(b\right)\big)$ відносно осей Ox і Oy обчислюються за формулами: $M_x=\int\limits_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx;$ $M_y=\int\limits_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$

Координати центра ваги цієї ж дуги знаходяться за формулами^

$$\bar{x}=\frac{M_y}{S}=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx};\quad \bar{y}=\frac{M_x}{S}=\frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}.$$

Статистичні моменти M_x і M_y криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ обчислюється за формулами: $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx;\ M_y = \int_a^b xydx$

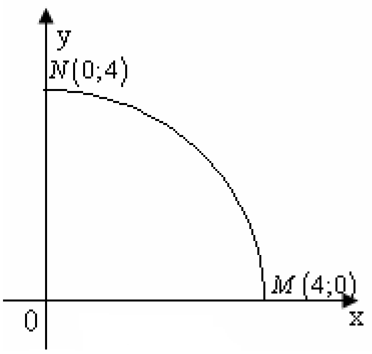
Координати центра ваги цієї ж криволінійної трапеції знаходяться за формулами:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx};\quad \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b ydx},$$

де S - площа трапеції.

Приклад 22. Знайти центр ваги дуги кола $x^2 + y^2 = 16$, розміщеної в першій чверті.

Розв'язання.



Координати центра ваги цієї дуги знаходимо за формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx};\quad \bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}.$$

Диференціюючи рівняння кола, дістаємо $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$,

звідси $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, тоді

$$\bar{x} = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_0^4 x\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx}{\int_0^4 \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}dx} = \frac{\int_0^4 x\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx}{\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}dx} = \frac{\int_0^4 x\sqrt{\frac{16}{y^2}}dx}{\int_0^4 \sqrt{\frac{16}{y^2}}dx} = \frac{\int_0^4 x\sqrt{\frac{16}{16-x^2}}dx}{\int_0^4 \sqrt{\frac{16}{16-x^2}}dx} = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi};$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{S} = \frac{\int_0^4 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx}{\int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx} = \frac{\int_0^4 y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx}{\int_0^4 \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx} = \frac{\int_0^4 4dx}{\int_0^4 \sqrt{\frac{16}{16-x^2}}dx} = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}.$$

Отже, координати точки C, яка є центром ваги, такі $C\left(\frac{8}{\pi};\frac{8}{\pi}\right)$.

12. Застосування в економіці

Позначимо $V(t)$, $D(t)$, $\Pi(t)$ – змінні витрати, доход та прибуток підприємства, тоді їх середні значення за час від t_1 до t_2 знаходять за формулами:

$$V_C = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt;\ D_C = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} D(t)dt;\ \Pi_C = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \Pi(t)dt.$$

Якщо $V(x)$ функція загальних витрат на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ – функція маргінальних витрат, то визначений інтеграл $\int_a^b V'(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a)$

дорівнює зміні загальних витрат при зростанні кількості виробленої продукції від a до b одиниць.

Якщо $D'(x)$ та $\Pi'(x)$ функції маргінального доходу та прибутку відповідно, то зміна доходу та прибутку при зростанні реалізації виробленої продукції від a до b одиниць обчислюється за формулами

$$\int_a^b D'(x)dx = D(x)\Big|_a^b = D(b) - D(a);$$

$$\int_a^b \Pi'(x)dx = \Pi(x)\Big|_a^b = \Pi(b) - \Pi(a).$$

Приклад 23. Маргінальні витрати підприємства можна задати функцією $V'(x) = 24,5 - 0,01x$. Знайти зростання загальних витрат, при зростанні виробництва з 2000 до 2500 одиниць.

Розв'язання.

Для знаходження загальних витрат використаємо формулу

$$\int_a^b V'(x)dx = V(x)\Big|_a^b = V(b) - V(a).$$

$$V = \int_{2000}^{2500} (24,5 - 0,01x)dx = \left(24,5x - 0,01\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2000}^{2500} =$$

$$= \left(24,5\cdot 2500 - 0,01\frac{2500^2}{2}\right) - \left(24,5\cdot 2000 - 0,01\frac{2000^2}{2}\right) = 1000.$$

Отже, витрати зростуть на 1000 у.г.о.

Вправи

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_1 = 4;$
2. $y = x^2 + 3, \quad y = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_1 = 1;$
3. $y = -x^2 + 6, \quad y = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_1 = 2;$
4. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_1 = 3;$
5. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi;$
6. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = 0;$
7. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}.$

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 4**):

1. $y = -3x, \quad y = 0, \quad x = 2;$
2. $2x + 3y + 6 = 0, \quad y = 0, \quad x = 4;$
3. $y = -x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1;$
4. $y = x^2 - 4, \quad y = 0;$

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2;$
2. $y = 4x^3, \quad y = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2;$
3. $y = x^3 - x, \quad y = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1;$

4. $y = x^3 - 4x, \quad y = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2;$
5. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2};$
6. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi;$
7. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}.$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y = x^2 + 4x + 4, \quad y = x + 4;$
2. $y = 2x^2 - x, \quad y = 2x + 2;$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0{,}5x;$
4. $y = 2 + x - x^2, \quad y = 2 - x;$
5. $y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x;$
6. $y = 2x^2 - 3x + 3, \quad y = 3 - x^2;$
7. $y = x^2 - 3x + 4, \quad y = 4 - 2x^2.$

5. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями (**1 – 8**):

1. $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$
2. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1;$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4;$
4. $y = 1 - x^2, \quad y = 0;$
5. $xy = 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3;$
6. $y = x^3; \quad y = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2;$
7. $y^2 - 3x = 0, \quad x - 3 = 0;$
8. $y = \frac{1}{3}x^2, \quad y = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями (**1 – 6**):

1. $y = x^2 + 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 5;$
2. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 0;$
3. $x^2 - 2y = 0, \quad y - 2 = 0;$
4. $y = x^2, \quad y = \frac{x^2 + 1}{2};$
5. $y = 3 - x^2, \quad y = x^2 + 1;$
6. $y = \frac{6}{x}; \quad x = 0; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = 6;$

7. Обчислити довжину дуги параболи $y = x^2$ між точками з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь: 1,196 (од.довж.)

8. Обчислити довжину дуги параболи $y = 4 - x^2$ між точками її перетину з віссю Ox.

Відповідь: $2\sqrt{17}+0{,}5\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$ (од.довж.)

9. Обчислити довжину дуги параболи $y^2 = 4x$ між точками $(0;0)$ та $\left(\frac{5}{4};\sqrt{5}\right)$.

Відповідь: $2{,}64$ (од.довж.)

10. Обчислити довжину дуги параболи $y^2 = x$ між точками з абсцисами $(0;0)$ та $\left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Відповідь: $1{,}196$ (од.довж.)

11. Обчислити площу поверхні , утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = x+2$ від вершини до точки з абсцисою $x=0$, $y \geq 0$.

Відповідь: $\frac{13}{3}\pi$

12. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$, де $0 \leq x \leq 4$.

Відповідь: $\frac{52}{3}\pi$

13. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кубічної параболи $y = \frac{x^3}{3}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

Відповідь: $2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{9}-\frac{1}{18}\right)$

14. Швидкість руху точки $v = 3t^2+2t-1$ (м/с). Знайдіть шлях, пройдений точкою за 10 с від початку руху.

Відповідь: 1090 м

15. Швидкість руху точки $v = 9t^2-8t$ (м/с). Знайдіть шлях, пройдений точкою за четверту секунду.

Відповідь: 83 м

16. Швидкість руху точки $v = 12t-3t^2$ (м/с). Знайдіть шлях, пройдений точкою від початку руху до її зупинки.

Відповідь: 32 м

17. Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямі по прямій. Перше тіло рухається з швидкістю $v = 3t^2$ (м/с), а друге – з швидкістю $v = 6t^2-10$ (м/с). На якій відстані одне від одного вони будуть через 10 с?

Відповідь: 900 м

18. Два тіла почали рухатися по прямій з однієї і тієї ж точки. Перше тіло рухається з швидкістю $v = 3t^2+4t$ (м/с), а друге – з швидкістю $v = 6t+12$ (м/с). В який момент часу і на якій відстані від початкової точки вони зустрінуться?

Відповідь: 4 с, 96 м

19. Тіло кинуто з поверхні землі вертикально вгору з швидкістю $v = 29{,}4-9{,}8t$ (м/с). Знайти найбільшу висоту піднімання тіла.

Відповідь: 44,1 м

20. Пружину розтягують на $0,02$ м під дією сили 60 Н. Яку роботу виконає ця сила, розтягуючи пружину на $0,12$ м?

Відповідь: $21,6$ Дж

21. Під дією сили 80 Н пружина розтягується на $0,02$ м. Початкова довжина пружини дорівнює $0,15$ м. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути її до $0,2$ м?

Відповідь: 5 Дж

22. Пружина в спокійному стані має довжину $0,1$ м. Сила в 20 Н розтягує пружину на $0,01$ м. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути її від $0,12$ м до $0,14$ м?

Відповідь: $1,2$ Дж

23. Для стискання пружини на $0,05$ м виконують роботу в 30 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб стиснути пружину на $0,08$ м?

Відповідь: $76,8$ Дж

24. Щоб стиснути пружину на $0,02$ м треба виконати роботу в 16 Дж. На яку довжину можна стиснути пружину, виконавши роботу в 100 Дж?

Відповідь: $0,05$ м

25. Обчислити масу прямолінійного стержня довжиною 100 см, якщо його лінійна густина $\rho(l) = 2 + 0,001l^2$ (г/см).

Відповідь: $533\frac{1}{3}$ г

26. Обчислити масу прямолінійного стержня довжиною 35 см,, якщо його лінійна густина $\rho(l) = 3 + 4l$ (кг/м).

Відповідь: $1,295$ кг

27. Знайти масу неоднорідного стержня завдовжки 40 см, якщо його лінійна густина $\rho(l) = 1 + 2l^2$ (кг/м).

Відповідь: $0,443$ кг

28. Знайти кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за 20 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = 2t + 1$ (А).

Відповідь: 420 Кл

29. Протягом 10 с сила струму в провіднику змінювалася за законом $I(t) = 4t + 1$ (А). Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час?

Відповідь: 210 Кл

30. Протягом 5 с сила струму в провіднику змінювалася за законом $I(t) = 2t + 3t^2$ (А). Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час?

Відповідь: 150 Кл

31. Визначити силу тиску води на вертикальну прямокутну пластинку, основа якої 30 м, а висота 10 м, якщо верхній кінець пластинки співпадає з рівнем води.

Відповідь: $1,47 \cdot 10^6$ Н

32. Визначити силу тиску води на одну із стінок акваріума, який довжиною 30 см, а висотою 20 см.

Відповідь: $\approx 58,8$ Н

33. Визначити силу тиску води на прямокутну пластинку з основою 16 см, висотою 10 см, занурену вертикально в воду так, що її верхня основа знаходиться на глибині 10 см.

Відповідь: $\approx 82{,}79$ Н

34. Визначити силу тиску води на прямокутну пластинку з основою 8 см, висотою 24 см, занурену вертикально в воду так, що її верхня основа знаходиться на глибині 2 см.

Відповідь: $\approx 5{,}49$ Н

35. Пластинка, яка має форму трикутника з основою $0{,}02$ м, а висотою $0{,}4$ м, занурена вертикально у воду. Знайти силу тиску води на цю пластинку, якщо її вершина лежить на поверхні води.

Відповідь: $\approx 104{,}6$ Н

36. Знайти силу тиску води на пластинка, яка має форму трикутника з основою 10 см, а висотою 4 см, яка занурена вертикально у воду так, що її вершина лежить на поверхні води.

Відповідь: $0{,}5$ Н

36. Циліндричний стакан заповнено ртуттю. Обчисліть силу тиску ртуті на бічну поверхню стакана, якщо висота його $h = 0{,}1$ м і радіус основи $r = 0{,}04$ м. густина олії 13600 кг/м^3.

Відповідь: 167 Н

37. Прямокутний резервуар, основою якого є квадрат з стороною 3 м, а висота дорівнює 2 м, заповнено водою. Обчисліть роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду з резервуара.

Відповідь: 176508 Дж

Подвійні інтеграли

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в обмеженій замкненій області D площини xOy. Розіб'ємо область D довільним чином на n елементарних областей, які мають площі $\Delta_{\sigma_1}, \Delta_{\sigma_2}, \ldots, \Delta_{\sigma_n}$ і діаметри $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Виберемо в кожній елементарній області довільну точку $P_\kappa(\xi_\kappa, \eta_\kappa)$ і помножимо значення функції в цій точці на площу елементарної області.

Інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D називається сума виду

$$\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa, \eta_\kappa)\Delta_{\sigma_\kappa} = f(\xi_1, \eta_1)\Delta_{\sigma_1} + f(\xi_2, \eta_2)\Delta_{\sigma_2} + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta_{\sigma_n}.$$

Подвійним інтегралом від функції $z = f(x, y)$ по області D називається границя інтегральної суми при умові, що число елементарних областей n прямує до нескінченності, а найбільший з діаметрів елементарних областей прямує до нуля:

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\substack{\max d_\kappa \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa, \eta_\kappa)\Delta_{\sigma_\kappa}.$$

Якщо $f(x, y) > 0$, то подвійний інтеграл в області D дорівнює **об'єму циліндричного тіла,** обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, збоку циліндричною поверхнею з твірними паралельними осі Oz і знизу областю D площини xOy:

$$V = \iint_D f(x, y)d\sigma.$$

Основні властивості подвійних інтегралів

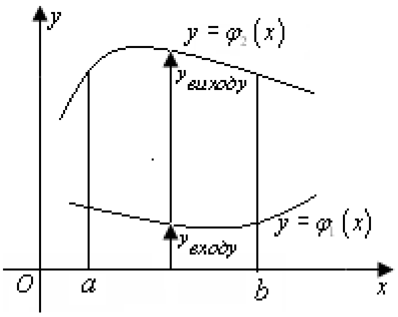
1. Якщо область інтегрування D розбито на дві області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то
$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$
2. Сталий множник C можна виносити за знак подвійного інтеграла:
$$\iint\limits_D \tilde{N}f(x,y)d\sigma = \tilde{N}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$
3. Інтеграл по області D від алгебраїчної суми дорівнює сумі інтегралів:
$$\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)d\sigma = \iint\limits_D f_1(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x,y)d\sigma.$$

Правила обчислення подвійних інтегралів

В декартових координатах подвійний інтеграл записується у вигляді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Розрізнюють дві основні області інтегрування:

1. Область інтегрування D обмежена зліва і справа прямими $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$, а знизу і зверху неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \le \varphi_2(x))$ кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній точці.



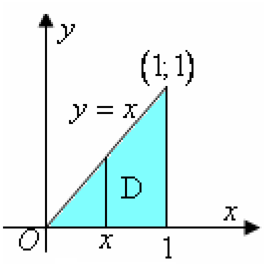
По такій області подвійний інтеграл обчислюється за формулою $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy,$

причому спочатку обчислюється інтеграл $\int\limits_{\phi(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy,$ в якому x вважається сталою.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$ по області D, обмеженої прямими

$x=0,\ y=0,\ y=x.$

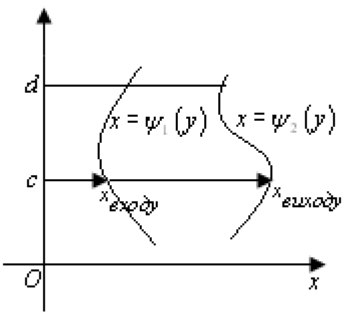
Розв'язання.



Мал.8.14

Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$ за формулою
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy:$$
$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xydy = \int\limits_0^1 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x dx = \int\limits_0^1 \left(x\frac{x^2}{2} - x\frac{0^2}{2}\right)dx =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x3}{2} - 0\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{x3}{2}dx = \frac{x^4}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{0}{8} = \frac{1}{8}.$$

2. Область інтегрування D обмежена знизу і зверху прямими $y=c$ і $y=d$, а зліва і справа неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою тільки в одній точці. При такій області інтеграл обчислюється за формулою

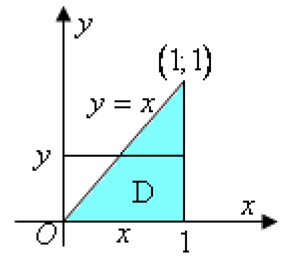


$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_{11}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

причому спочатку обчислюється інтеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, в якому y вважається сталою.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$ по області D, обмеженої прямими $x=0,\ y=0,\ y=x.$

Розв'язання.



Мал.8.16

Обчислимо подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$ за формулою

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_{11}(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx:$$

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 xydx = \int\limits_0^1 y\frac{x^2}{2}\bigg|_y^1 dy = \int\limits_0^1 \left(y\frac{1^2}{2} - y\frac{y^2}{2}\right)dx =$$

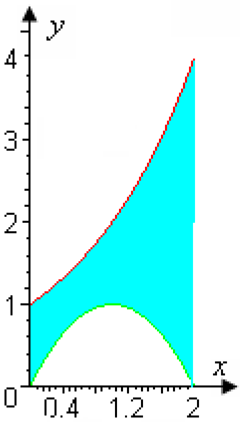
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\right)dx = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}.$$

В більш загальному випадку область інтегрування шляхом розбиття на частини зводиться до основних.

Площа плоскої області D знаходиться за формулою $S = \iint\limits_D dxdy.$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x=0$, $x=2$ і кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Розв'язання.



Мал.8.17

Зобразимо фігуру обмежену прямими $x=0$, $x=2$ і кривими $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Скористаємося формулою $S = \iint\limits_D dxdy.$

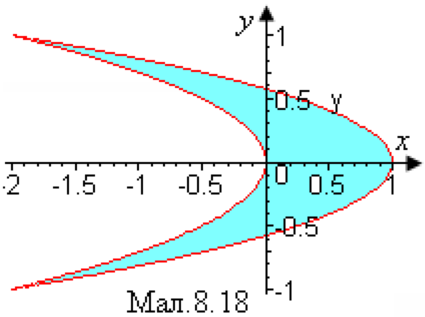
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x-x^2}^{2^x} dy = \int\limits_0^2 y\Big|_{2x-x^2}^{2^x} dx = \int\limits_0^2 \left(2^x - 2x + x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{2^x}{\ln 2} - x + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} \approx 3.$$

☞ *Приклад*

Обчислити площу фігури, обмежену параболами $x=-2y^2$ *і* $x=1-3y^2$.

Розв'язання



Мал.8.18

Фігура, обмежена параболами $x=-2y^2$ *і* $x=1-3y^2$, *зображена на малюнку* 8.18.

Для знаходження її площі скористаємось подвійним інтегралом.

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x=-2y^2; \\ x=1-3y^2, \end{cases}$

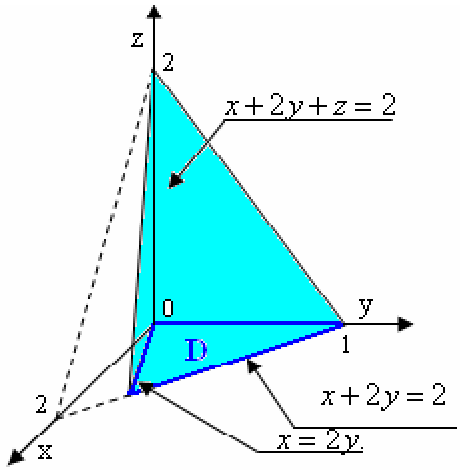
знайдемо ординати точок перетину кривих $y_1=-1,\ y_2=1$. *Так як* $1-3y^2 \ge -2y^2$ *при* $-1 \le y \le 1$, *то*

$$S=\iint_D dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-2y^2}^{1-3y^2}dx=\int_{-1}^{1}x\Big|_{-2y^2}^{1-3y^2}dy=\int_{-1}^{1}\left(1-3y^2+2y^2\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(1-y^2\right)dy=\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z=f(x,y)$, знизу площиною $z=0$ і з боків прямою циліндричною поверхнею, що вирізає на площині xOy область D знаходиться за формулою $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$

Приклад.



Мал.8.19

Знайти об'єм трикутної піраміди обмеженої площинами $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$.

Розв'язання

Трикутна піраміда, яка обмежена площинами $x+2y+z=2$, $x=2y$, $x=0$, $z=0$, *зображена на малюнку* 8.19. *Область* D *є трикутником, який визначається прямими* $x=2y$, $x+2y=2$, $x=0$.

Знайдемо точку перетину прямих $x=2y$, $x+2y=2$:

$$\begin{cases} x=2y; \\ x+2y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

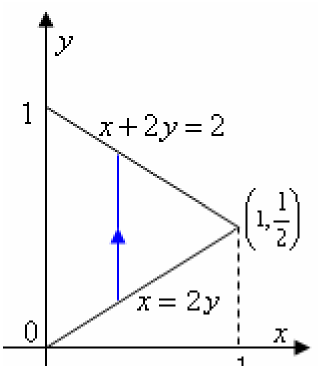
Шуканий об'єм лежить під графіком функції $z=2-x-2y$ *і вище області*

$$D=\left\{(x,y)\Big|\,0\le x\le 1,\ \frac{x}{2}\le y\le 1-\frac{x}{2}\right\}.$$

Покажемо область D *в площині* xOy *(мал.* 8.20*).*

Застосовуємо формулу

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$



Мал.8.20

$$V=\iint_D(2-x-2y)dS=\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}(2-x-2y)dydx=\int_0^1\left(2y-xy-y^2\right)\Big|_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int_0^1\left[2-x-x\left(1-\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

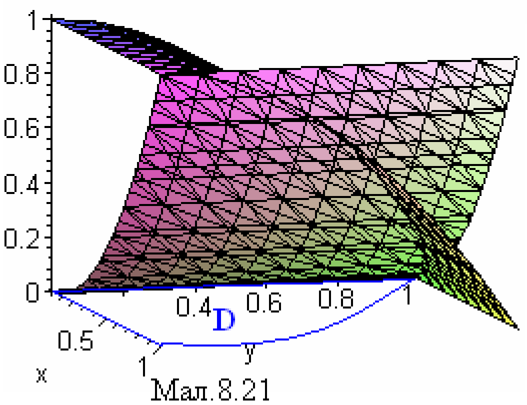
Отже, об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{3}$ *куб. од.*

☞ *Приклад*

Знайти об'єм тіла, яке лежить під поверхнею $z=1-y^2$ *і вище поверхні* $z=x^2$ *(мал.* 8.21*).*

Розв'язання

Рівняння $z=1-y^2$ *та* $z=x^2$ *визначають параболічні циліндри. Ці параболічні циліндри перетинаються по циліндру* $x^2+y^2=1$, *який перетинає площину* xOy *по колу* $x^2+y^2=1$, *тобто область інтегрування є коло з центром в початку координат та радіусом* 1.



Мал.8.21

Шуканий об'єм дорівнює чотирьом об'ємам тіла, яке лежить у першому октанті.

Область D *в першій чверті площини* xOy *описується так:*

$$D=\left\{(x,y)\middle|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Знаходимо об'єм:

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(1-y^2-x^2\right)dS=$$

$$=4\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-y^2-x^2\right)dy=4\int_0^1\left(\left(1-x^2\right)y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{8}{3}\int_0^1\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\left|\begin{matrix}x=\sin u\\ dx=\cos u du\\ 0\le u\le\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u du=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2u\right)^2du=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2u+\frac{1+\cos 4u}{2}\right)du=\frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ \ (\text{куб. од.}).$$

Площа поверхні, яка задана рівнянням $z=f(x,y)$ знаходиться за формулою

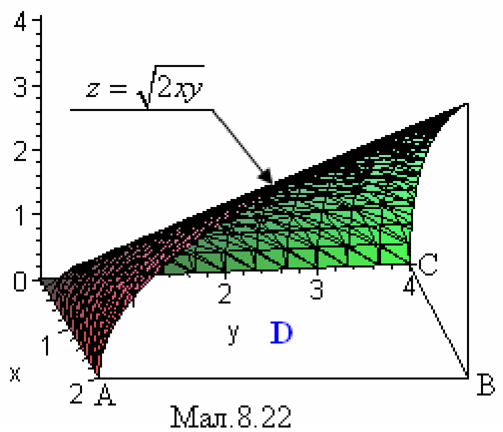
$$I=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

де D – проекція даної поверхні на площину xOy.

☞ *Приклад*

Знайти площу частини поверхні конуса $z^2=2xy$, *яка розміщена в першому октанті між площинами* $x=2$, $y=4$.

Розв'язання



Мал.8.22

Використаємо формулу для знаходження площі поверхні $z=f(x,y)$, *яка проектується на площину* xOy *в область* D:

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Оскільки $z^2=2xy$, *то* $z=\sqrt{2xy}$. *Звідси*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot 2y}{2\sqrt{2xy}}=\frac{y}{\sqrt{2xy}},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{2xy}}.$$

Тоді

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{2xy}}\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2xy}}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+2xy+}{2xy}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Проекцією поверхні на площину xOy є область D - прямокутник $OABC$.

Обчисливши подвійний інтеграл, знайдемо площу поверхні:

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 dx\int_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_0^4 dx=2\sqrt{2}\int_0^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^2=16\ (кв.од.).$$

Якщо плоска пластинка D, яка лежить в площині xOy, має поверхневу густину $\rho(x,y)$, то **маса пластинки** знаходиться за формулою

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dxdy.$$

Статистичні моменти M_x та M_y відносно координатних осей Ox і Oy знаходяться за формулами

$$M_x=\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy;\ M_y=\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy.$$

Координати центра ваги x_C та y_C пластинки знаходяться за формулами

$$x_C=\frac{M_y}{m};\ y_C=\frac{M_x}{m}.$$

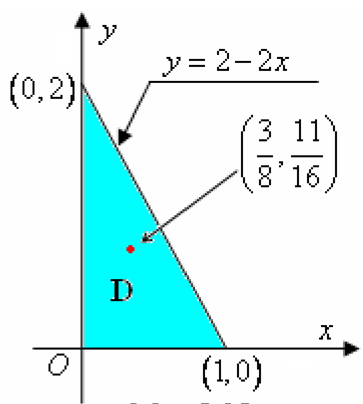
Якщо пластинка займає область D площини xOy і має сталу поверхневу густину рівну одиниці, то **координати її центра ваги** $\bar{x}$, $\bar{y}$ знаходяться за формулами

$$\bar{x}=\frac{\iint_D xdxdy}{S};\ \bar{y}=\frac{\iint_D ydxdy}{S},$$

де S площа пластинки D.

Приклад. Знайти масу і центр мас трикутної пластини з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ та $(0,2)$, якщо функція густини задана рівнянням $\rho(x,y)=1+3x+y$.

Розв'язання.



Мал.8.23

Зобразимо плоску пластинку.

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $(1,0)$ та $(0,2)$. Скористаємося формулою $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Підставивши в неї координати точок $(1,0)$ та $(0,2)$, матимемо

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{2-0}\Leftrightarrow y=2-2x.$$

Знаходимо масу пластинки.

$$m=\iint_D \rho(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dydx=$$

$$\int_0^1\left(y+3xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2y}dx=4\int_0^1(1-x^2)dx==4\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}.$$

Координати центра ваги x_C та y_C пластинки знаходимо за формулами

$$x_C=\frac{M_y}{m};\ y_C=\frac{M_x}{m}.$$

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\rho\left(x,y\right)dxdy;}{m}=\frac{3}{8}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2-2x}\left(x+3x^2+xy\right)dydx=\frac{3}{8}\int\limits_0^1\left(xy+3x^2y+x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2-2x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^1\left(x-x^3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{8}.$$

$$y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\rho\left(x,y\right)dxdy}{m}=\frac{3}{8}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2-2x}\left(y+3xy+y^2\right)dydx=\frac{3}{8}\int\limits_0^1\left(\frac{y^2}{2}+3x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-2x}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(7-9x-3x^2+5x^3\right)dx=\frac{1}{4}\left(7x-9\frac{x^2}{2}-x^3+5\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{11}{16}.$$

Отже, центр мас знаходиться в точці $\left(\frac{3}{8},\frac{11}{16}\right)$.