Безпосереднє інтегрування у невизначеному інтегралі.

Приклад 1. Знайдіть такі інтеграли:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$

2. $\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 6\cdot\frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C.$

3. $\int\left(4x^3 - 6x^2 - 4x + 3\right)dx = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx - \int 4x dx + \int 3dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx -$
$4\int x dx + 3\int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 6\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 3x + C = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + C.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

5. $\int\frac{2dx}{x+3} = 2\int\frac{dx}{x+3}.$

   Оскільки $dx = d\left(x+3\right)$, то $2\int\frac{dx}{x+3} = 2\int\frac{d\left(x+3\right)}{x+3} = 2\ln\left|x+3\right| + C.$

6. $\int 3^{5x} dx = \frac{3^{5x}}{\ln 3}\cdot\frac{1}{5} + C = \frac{3^{5x}}{5\ln 3} + C.$

7. $\int 2^x\cdot 3^x\cdot 5^x dx = \int 30^x dx = \frac{30^x}{\ln 3} + C.$

8. $\int e^{-5x} dx = \frac{1}{-5}e^{-5x} + C = -\frac{e^{-5x}}{5} + C.$

9. $\int\cos\left(5x-3\right)dx = \frac{1}{5}\sin\left(5x-3\right) + C.$

10. $\int\frac{dx}{x^2-4} = \int\frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$

11. $\int\frac{dx}{3x^2-9} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-3} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right| + C.$

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x + \sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right| + C.$

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C.$

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-x^2}} = \frac{1}{3}\cdot\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$

16. $\int\frac{dx}{16+x^2} = \int\frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4}arctg\frac{x}{4} + C.$

17. $\int\frac{dx}{25+4x^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\frac{25}{4}+x^2} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}arctg\frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + C.$

Метод підстановки у невизначеному інтегралі

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int (7-2x)^3\,dx$

$$\int (7-2x)^3\,dx = \left|\begin{array}{l} 7-2x=u \\ -2dx=du \\ dx=-\dfrac{du}{2} \end{array}\right| = \int u^3\cdot\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^3du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+C = -\frac{1}{8}u^4+C = -\frac{1}{8}(7-2x)^4+C.$$

2. $\int \dfrac{dx}{(4-3x)^2}$

$$\int \frac{dx}{(4-3x)^2} = \int (4-3x)^{-2}\,dx = \left|\begin{array}{l} 4-3x=t \\ -3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{-3} \end{array}\right| = \int t^{-2}\cdot\left(\frac{dt}{-3}\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t}+C =$$

$$= \frac{1}{3t}+C = \frac{1}{3(4-3x)}+C.$$

3. $\int \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx$

$$\int \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx = \left|\begin{array}{l} 2x^3+1=a \\ 6x^2dx=da \\ x^2dx=\dfrac{da}{6} \end{array}\right| = \int a^4\cdot\frac{da}{6} = \frac{1}{6}\int a^4da = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^5}{5}+C = \frac{1}{30}a^5+C = \frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C.$$

7. $\int \sqrt{4x^3+1}\,x^2dx$

$$\int \sqrt{4x^3+1}\,x^2dx = \left|\begin{array}{l} 4x^3+1=a \\ 12x^2dx=da \\ x^2dx=\dfrac{da}{12} \end{array}\right| = \int \sqrt{a}\cdot\frac{da}{12} = \frac{1}{12}\int\sqrt{a}da = \frac{1}{12}\int a^{\frac{1}{2}}da = \frac{1}{12}\cdot\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{18}\sqrt{a^3}+C =$$

$$\frac{1}{18}\sqrt{\left(4x^3+1\right)^3}+C.$$

8. $\int \dfrac{x^2dx}{5x^3+1}$

$$\int \frac{x^2dx}{5x^3+1} = \left|\begin{array}{l} 5x^3+1=a \\ 15x^2dx=da \\ x^2dx=\dfrac{da}{15} \end{array}\right| = \int\frac{\frac{da}{15}}{a} = \frac{1}{15}\int\frac{da}{a} = \frac{1}{15}\ln|a|+C = \frac{1}{15}\ln\left|5x^3+1\right|+C.$$

10. $\int 3^{5x^2}\,xdx$

$$\int 3^{5x^2} x dx = \begin{vmatrix} 5x^2 = t \\ 10x dx = dt \\ x dx = \dfrac{dt}{10} \end{vmatrix} = \int 3^t \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10}\int 3^t dt = \frac{1}{10}\cdot\frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{1}{10}\cdot\frac{3^{5x^2}}{\ln 3} + C.$$

11. $\int e^{-3x^2+1} x dx$

$$\int e^{-3x^2+1} x dx = \begin{vmatrix} -3x^2+1 = a \\ -6x dx = da \\ x dx = -\dfrac{da}{6} \end{vmatrix} = \int e^a \cdot \left(-\frac{da}{6}\right) = -\frac{1}{6}\int e^a da = -\frac{1}{6}e^a + C = -\frac{1}{6}e^{-3x^2+1} + C.$$

12. $\int x^3 \cos x^4 dx$

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \begin{vmatrix} x^4 = t \\ 4x^3 dx = dt \\ x^3 dx = \dfrac{dt}{4} \end{vmatrix} = \int \cos t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin x^4 + C.$$

13. $\int \dfrac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

$$\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg\frac{e^x}{2} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int x \sin x dx$

$$\int x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

2. $\int (2x-5)e^{-3x} dx$

$$\int (2x-5)e^{-3x} dx = \begin{vmatrix} u = 2x-5 & du = 2dx \\ dv = e^{-3x}dx & v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} \end{vmatrix} = (2x-5)\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)\cdot 2dx =$$

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot(2x-5) + \frac{2}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}\cdot(2x-5) + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} + C = -\frac{e^{-3x}}{3}\left(2x-5+\frac{2}{3}\right) + C =$$

$$= -\frac{e^{-3x}}{9}(6x-13) + C = \frac{e^{-3x}}{9}(13-6x).$$

3. $\int (3x-4)\ln x dx$

$$\int (3x-4)\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (3x-4)dx & v = \dfrac{3x^2}{2} - 4x \end{vmatrix} = \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) - \int\left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$\left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\cdot \ln x - \int\left(\frac{3x}{2} - 4\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\cdot \ln x - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + 4x + C = \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right)\cdot \ln x - \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца.
Властивості визначених інтегралів

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то справедлива рівність (адитивність визначеного інтеграла):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Сталий множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

6. Визначений інтеграл від суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

7. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x) \le g(x)$ $(a<b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл $F(x)$, є **формула Ньютона – Лейбніца:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

Тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межах інтегрування.

Приклад 1. Обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int_2^3 x^2 dx$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

2. $\int_{-1}^2 \left(x^2+2x+1\right)dx$

$$\int_{-1}^2 \left(x^2+2x+1\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2^2+2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+(-1)\right) = \left(\frac{8}{3}+4+2\right) -$$

$$-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right) = \frac{8}{3}+4+2+\frac{1}{3}-1+1 = 9.$$

3. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3}$

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^{-3}dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{2x^2}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}(1-4) = \frac{3}{2}.$$

4. $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int\limits_{8}^{27} x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{8}^{27} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_{8}^{27} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\Bigg|_{8}^{27} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}\right) = \frac{3}{2}(9-4) = \frac{15}{2}.$$

5. $\int\limits_{1}^{3} e^{2x}dx$

$$\int\limits_{1}^{3} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_{1}^{3} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot 3} - e^{2\cdot 1}\right) = \frac{1}{2}\left(e^6 - e^2\right) = \frac{e^2}{2}\left(e^4 - 1\right).$$

6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+2}$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\Big|_{0}^{1} = \ln|1+2| - \ln|0+2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\cos 4\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 4\cdot 0\right) = -\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(ctg\frac{\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

9. $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{0}^{1} = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Вправи

1. Обчислити такі визначені інтеграли (**1 – 10**):

1. $\int_1^2 x^3dx;\ \int_1^3 x^4dx.$

2. $\int_{-2}^{3}\left(4x^3-3x^2+2x+1\right)dx;\ \int_{-1}^{0}\left(x^3+2x\right)dx.$

3. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2};\ \int_0^4\sqrt{x}dx.$

4. $\int_1^8\sqrt[3]{x^2}dx;\ \int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

5. $\int_{-1}^{1}e^xdx;\ \int_0^1 e^{3x}dx.$

6. $\int_3^6\frac{dx}{x};\ \int_2^3\frac{dx}{x-1}.$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin xdx;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx.$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4dx}{\cos^2 x};\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}.$

9. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};\ \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

10. $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{9+x^2};\ \int_5^{5\sqrt{3}}\frac{dx}{25+x^2}.$

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної

Приклад 1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли:

1. $\int_0^1\frac{dx}{\left(3x+1\right)^4}$

$$\int_0^1\frac{dx}{\left(3x+1\right)^4}=\left|\begin{array}{ll}3x+1=t & t_1=3\cdot 0+1=1\\ 3dx=dt & t_1=3\cdot 1+1=4\\ dx=\dfrac{dt}{3} & \end{array}\right|=\int_1^4\frac{\frac{dt}{3}}{t^4}=\int_1^4\frac{dt}{3t^4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\Bigg|_1^4=-\frac{1}{9t^3}\Bigg|_1^4=-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{1^3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{64}-1\right)=-\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{63}{64}\right)=\frac{7}{64}.$$

2. $\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}}$

$$\int_{-2}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}}=\int_{-2}^{5}\left(x+3\right)^{-\frac{2}{3}}dx=\left|\begin{array}{ll}x+3=t & t_1=-2+3=1\\ dx=dt & t_2=5+3=8\end{array}\right|=\int_1^8 t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\Bigg|_1^8=\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_1^8=3t^{\frac{1}{3}}\Bigg|_1^8=3\sqrt[3]{t}\Big|_1^8=$$

$$=3\cdot\left(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}\right)=3\cdot 1=3.$$

3. $\int_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx$

$$\int_0^1 \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx = \left| \begin{array}{l} 2x^3+1=a; \quad 6x^2dx=da; \quad x^2dx=\dfrac{da}{6}; \\ a_1=2\cdot 0^3+1=1; \qquad a_2=2\cdot 1^3+1=3 \end{array} \right| = \int_1^3 a^4\cdot\frac{da}{6} = \frac{1}{6}\int_1^3 a^4da = \frac{1}{6}\cdot\left.\frac{a^5}{5}\right|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right) = \frac{242}{30} = \frac{121}{15} = 8\frac{1}{15}.$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx = \left| \begin{array}{ll} 3\sin x+1=z & z_1=3\sin 0+1=1 \\ 3\cos xdx=dz & z_2=3\sin\dfrac{\pi}{2}+1=4 \\ \cos xdx=\dfrac{dz}{3} & \end{array} \right| = \int_1^4 \sqrt{z}\cdot\frac{dz}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\left. z^{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\left.\sqrt{z^3}\right|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{9}\cdot(8-1) = \frac{14}{9}.$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x} = \left| \begin{array}{ll} 3-\cos x=t & t_1=3-\cos 0=2 \\ \sin xdx=dt & t_1=3-\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{2} \end{array} \right| = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln\frac{5}{2}-\ln 2 = \ln\frac{5}{4}.$$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx = \left| \begin{array}{ll} e^{\sin x}=u & u_1=e^{\sin 0}=e^0=1 \\ e^{\sin x}\cos xdx=du & u_1=e^{\sin\frac{\pi}{6}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{e}} du = u\Big|_1^{\sqrt{e}} = \sqrt{e}-1.$$

7. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2xdx$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2xdx = \left| \begin{array}{ll} 2x=t & t_1=2\cdot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6} \\ 2dx=dt & t_2=2\cdot\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4} \\ dx=\dfrac{1}{2}dt & \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin tdt = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$$

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \begin{matrix} \frac{x}{2} = u; \quad \frac{dx}{2} = du; \quad dx = 2du; \\ u_1 = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad u_2 = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2du}{\cos^2 u} = 2tgu\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(tg\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{6} \right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= \frac{2\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}.$$

9. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \left| \begin{matrix} 4-9x^2 = 4\left(1 - \left(\frac{3x}{2} \right)^2 \right); \\ u = \frac{3x}{2}; \quad du = \frac{3}{2}dx; \quad dx = \frac{2}{3}du; \\ u_1 = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad u_2 = \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right| = \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{2}{3}du}{\sqrt{4\left(1-u^2\right)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\arcsin u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}.$$

10. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$

$$\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2} = \left| \begin{matrix} 9+16x^2 = 9\left(1 + \left(\frac{4x}{3} \right)^2 \right); \\ \frac{4x}{3} = u; \quad \frac{4dx}{3} = du; \quad dx = \frac{3}{4}dx; \\ u_1 = \frac{4\cdot\frac{3}{4}}{3} = 1; \quad u_2 = \frac{4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}}{3} = \sqrt{3} \end{matrix} \right| = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{4\cdot\frac{3}{4}dx}{9\cdot\left(1+u^2\right)} = \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+u^2} = \frac{1}{3}arctgu\Big|_{1}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(arctg\sqrt{3} - arctg1 \right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}.$$

Вправи

1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли (**1 – 10**):

1. $\int\limits_{2}^{3} \left(2x-1\right)^3 dx; \quad \int\limits_{4}^{5} \left(4-x\right)^3 dx.$

2. $\int\limits_{0}^{3} \sqrt[3]{3x-1}dx; \quad \int\limits_{0}^{5} \sqrt{3x+1}dx.$

3. $\int_{-1}^{2}\left(x^2-1\right)^3 xdx;\ \int_{0}^{2}9\sqrt{x^3+1}x^2dx.$

4. $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sqrt{1-\cos x}\sin xdx;$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\sin z}\cos zdz.$

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x};\ \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3x^2dx}{1+x^3}.$

6. $\int_{0}^{-\frac{1}{2}}e^{-2x}dx;\ \int_{0}^{1}e^{x^2}xdx.$

7. $\int_{0}^{\pi}\sin\frac{x}{3}dx;\ \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}}\cos 3xdx.$

8. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2 2x};\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}.$

9. $\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}};\ \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{9-2x^2}}.$

10. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{6}}\frac{dx}{1+2x^2};\ \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\frac{4dx}{2+9x^2}.$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ та їх похідні $u'(x)$ та $v'(x)$ неперервні в проміжку $[a;b]$, то формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд: $\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_a^b-\int_{a}^{b}vdu.$

Приклад 1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли:

1. $\int_{0}^{2\pi}x\cos 2xdx$

$$\int_{0}^{2\pi}x\cos xdx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{matrix}\right|=x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi}-\int_{0}^{2\pi}\sin xdx=\left(2\pi\cdot\sin 2\pi-0\cdot\sin 0\right)+$$

$$+\cos x\Big|_0^{2\pi}=\left(0-0\right)+\cos 2\pi-\cos 0=1-1=0.$$

1. $\int_{e}^{4}x\ln xdx$

$$\int_{e}^{4}x\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_e^4-\int_{e}^{4}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\left(\frac{4^2}{2}\cdot\ln 4-\frac{e^2}{2}\cdot\ln e\right)-\frac{1}{2}\int_{e}^{4}xdx=$$

$$\left(8\ln 4-\frac{e^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_e^4=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(4^2-e^2\right)=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-4+\frac{e^2}{4}=8\ln 4-4-\frac{e^2}{4}.$$

Вправи

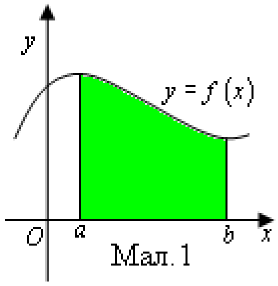
1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли (**1 – 4**):

   1. $\int\limits_0^1 \arcsin x dx.$
   2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$
   3. $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arc}\,tgxdx.$
   4. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$

Застосування визначеного інтеграла

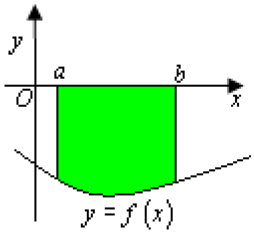
1. Площа плоскої фігури

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$, прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox, то її площу обчислюється за формулою $S = \int\limits_a^b f(x)dx.$



Мал. 1

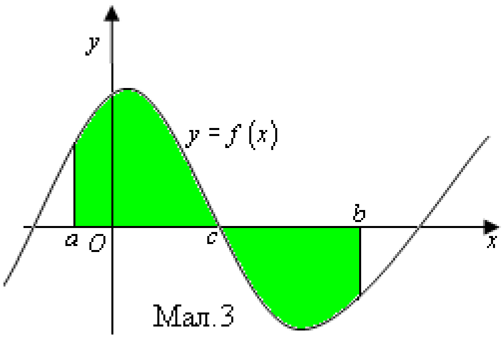
Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, лежить під віссю Ox, то площу знаходять за формулою $S = \int\limits_a^b \left| f(x) \right| dx.$



Мал. 2

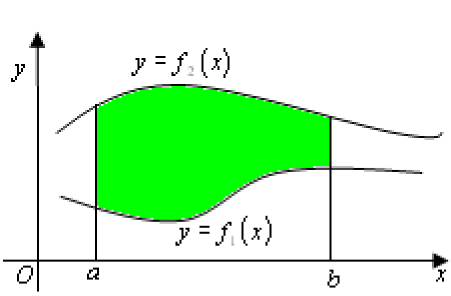
Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, розміщена з обох боків від осі Ox, то площу знаходять за формулою $S = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b \left| f(x) \right| dx.$

y



Мал. 3

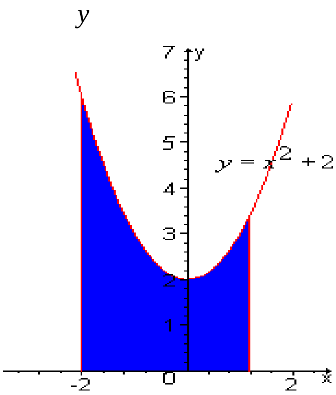
Якщо фігура обмежена двома кривими, що перетинаються, з яких $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, і прямими $x = a$ і $x = b$, де $a \leq x \leq b$ і $f_1(x) \leq f_2(x)$, тоді її площу знаходимо за формулою $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$



Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених вказаними лініями:

1. $y = x^2 + 2; \quad y = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



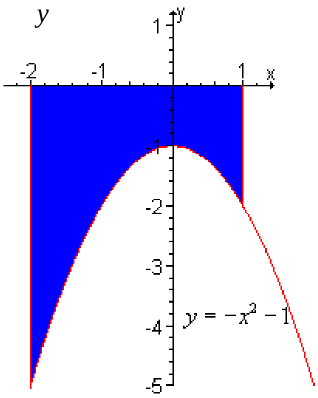
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою $y = x^2 + 2$, прямими $x_1 = -2;\ x_2 = 1$ та віссю Ox, тому маємо:

$$S = \int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} - 2 = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3}(\text{êâ.î ä.})$$

2. $y = -x^2 - 1;\ \ x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



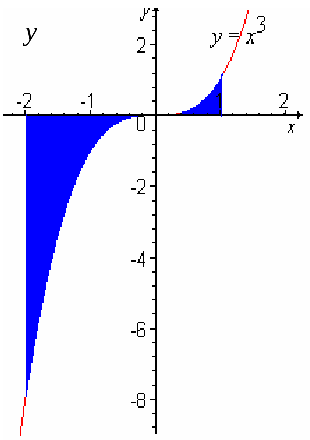
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена під віссю Ox, тому маємо:

$$S = \int_{-2}^{1} \left|-x^2 - 1\right| dx = \left|-\frac{x^3}{3} - x\right|\Bigg|_{-2}^{1} = \left|-\frac{(-2)^3}{3} - 1\cdot(-2)\right| -$$

$$- \left|\frac{0^3}{3} + 1\cdot 0\right| = \frac{8}{3} + 2 - 0 - 0 = 2\frac{2}{3} + 2 = 4\frac{2}{3}(\text{кв.од.})$$

3. $y = x^3;\ \ x_1 = -2;\ \ x_2 = 1.$

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.

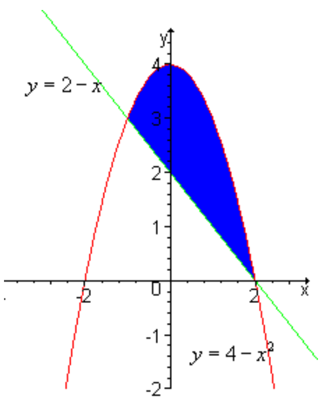


У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена з обох боків від осі Ox, тому маємо:

$$S = \int_{-2}^{0} \left|x^3\right| dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = \left|\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{0}\right| + \frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = \left|\frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4}\right| + \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} =$$

$$= \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}(\text{кв.од.})$$

4. $y = 4 - x^2;\ \ y = 2 - x.$



Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.

Для визначення точок перетину заданих ліній розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $4 - x^2 = 2 - x;$

$$x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -1;\ \ x_2 = 2.$$

Тоді обчислимо площу шуканої фігури:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(4-x^2-(2-x)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(2+x-x^2\right)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(2\cdot 2+\frac{2^2}{2}-\frac{2^3}{3}\right)-$$

$$-\left(2\cdot(-1)+\frac{(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}\right)=4+2-\frac{8}{3}+2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=4,5(\text{êâ.î ä.})$$

2. Об’єм тіла обертання

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y=f(x)$ і прямими $x=a,\ x=b,\ y=0,$ обчислюється за формулою $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)\geq 0$ і прямими $y=c,\ y=d,\ x=0,$ то об’єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, знаходять за формулою $V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$

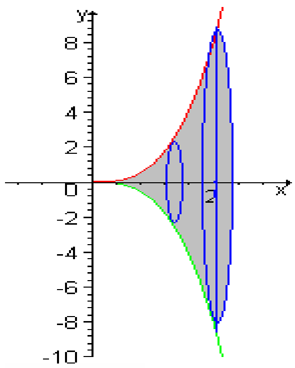
Якщо навколо осі Ox обертається фігура, обмежена кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, $f_2(x)\geq f_1(x)\geq 0,$ і прямими $x=a,\ x=b,$ то об’єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою $V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$

Якщо навколо осі Oy обертається фігура, обмежена кривими $x=\varphi_1(y),\ x=\varphi_2(y),\ \varphi_2(y)\geq\varphi_1(y)\geq 0,$ і прямими $y=c,\ y=d,$ то об’єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою $V=\pi\int_c^d\left(\varphi_2^2(y)-\varphi_1^2(y)\right)dy$

Приклад 2. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

1. $y=x^3;\ \ y=0;\ \ x_1=0;\ \ x_2=2,$ навколо осі Ox.

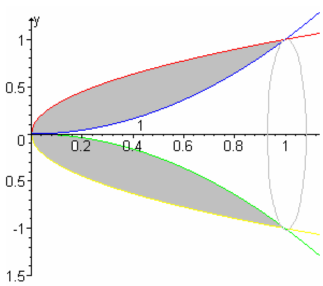
Зобразимо тіло, утворене внаслідок обертання фігури, яка обмежена заданими лініями, та обчислимо його об’єм



$$V=\pi\int_0^2\left(x^3\right)^2dx=\pi 2dx=\pi\,\frac{x^7}{7}\Bigg|_0^2=\frac{\pi}{7}\left(2^7-0^7\right)=$$

$$=\frac{\pi}{7}\cdot(128-0)=\frac{128\pi}{7}(\text{куб.од.})$$

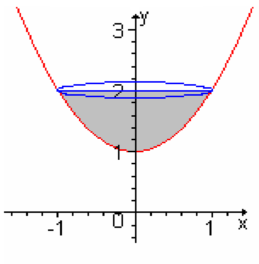
2. $y=x^2;\ \ y=\sqrt{x},$ навколо осі Ox.



$$V=\pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^5}{5}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^5}{5}\right)\right]=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-0+0\right)=\frac{3\pi}{10}(\text{êóá.î ä.}).$$

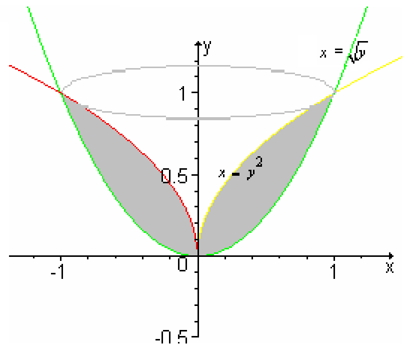
3. $y=x^2+1;\quad y=2,$ навколо осі Oy.



$$V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{y-1}\right)^2dx=\pi\int_1^2(y-1)dx=\pi\left(\frac{y^2}{2}-y\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\pi\left(\left(\frac{2^2}{2}-2\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\right)=\pi\left(2-2-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\pi}{2}(\text{куб.од.})$$

4. $y=x^2;\quad x=y^2,$ навколо осі Oy.



$$V=\pi\int_0^1\left(\left(\sqrt{y}\right)^2-\left(y^2\right)^2\right)dy=\pi\int_0^1\left(y-y^4\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left[\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^5}{5}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-\frac{0^5}{5}\right)\right]=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-0+0\right)=\frac{3\pi}{10}(\text{куб.од.}).$$

Вправи

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y=x^2,\quad y=0,\quad x_1=2,\quad x_1=4;$
2. $y=x^2+3,\quad y=0,\quad x_1=-1,\quad x_1=1;$
3. $y=-x^2+6,\quad y=0,\quad x_1=-1,\quad x_1=2;$
4. $y=x^3,\quad y=0,\quad x_1=1,\quad x_1=3;$
5. $y=\sin x,\quad y=0,\quad x_1=\frac{\pi}{2},\quad x_2=\pi;$
6. $y=\cos x,\quad y=0,\quad x_1=-\frac{\pi}{2},\quad x_2=0;$
7. $y=tgx,\quad y=0,\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{\pi}{4}.$

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 4**):

1. $y=-3x,\quad y=0,\quad x=2;$
2. $2x+3y+6=0,\quad y=0,\quad x=4;$
3. $y=-x^2-1,\quad y=0,\quad x_1=-2,\quad x_2=1;$
4. $y=x^2-4,\quad y=0;$

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y=x^3,\quad y=0,\quad x_1=-2,\quad x_2=2;$
2. $y=4x^3,\quad y=0,\quad x_1=-1,\quad x_2=2;$
3. $y=x^3-x,\quad y=0,\quad x_1=-1,\quad x_2=1;$

4. $y = x^3 - 4x, \quad y = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2;$

5. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2};$

6. $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi;$

7. $y = tgx, \quad y = 0, \quad x_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}.$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (**1 – 7**):

1. $y = x^2 + 4x + 4, \quad y = x + 4;$
2. $y = 2x^2 - x, \quad y = 2x + 2;$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0,5x;$
4. $y = 2 + x - x^2, \quad y = 2 - x;$
5. $y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x;$
6. $y = 2x^2 - 3x + 3, \quad y = 3 - x^2;$
7. $y = x^2 - 3x + 4, \quad y = 4 - 2x^2.$

5. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями (**1 – 8)**:

1. $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$
2. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1;$
3. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4;$
4. $y = 1 - x^2, \quad y = 0;$
5. $xy = 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3;$
6. $y = x^3; \quad y = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2;$
7. $y^2 - 3x = 0, \quad x - 3 = 0;$
8. $y = \frac{1}{3}x^2, \quad y = 0, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$

6. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями (**1 – 6**):

1. $y = x^2 + 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 5;$
2. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 0;$
3. $x^2 - 2y = 0, \quad y - 2 = 0;$
4. $y = x^2, \quad y = \frac{x^2 + 1}{2};$
5. $y = 3 - x^2, \quad y = x^2 + 1;$
6. $y = \frac{6}{x}; \quad x = 0; \quad y_1 = 1; \quad y_2 = 6;$