

Невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.

Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** і позначається символом $\int f(x)dx$, тобто $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних для функції $f(x)$, а C – довільна стала.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Таблиця невизначених інтегралів.

$$\int dx = x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

Безпосереднє інтегрування у невизначеному інтегралі.

Безпосереднє інтегрування ґрунтується на прямому використанні таблиці інтегралів. Тут можуть бути такі випадки:

1. даний інтеграл відшукується безпосередньо за відповідним табличним інтегралом;
2. даний інтеграл після застосування властивостей 4 і 5 зводять до одного або кількох табличних інтегралів;
3. даний інтеграл після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією і застосування властивостей 4 і 5 зводять до одного або кількох табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайдіть такі інтеграли:

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$

2. $\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 6 \cdot \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C.$
3. $\int (4x^3 - 6x^2 - 4x + 3) dx = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx - \int 4x dx + \int 3 dx = 4 \int x^3 dx - 6 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 3 \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + C.$
4. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx = \int (x^2 + 3x + 4) dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 + 4x + C$
 $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C.$
7. $\int \frac{2dx}{x+3} = 2 \int \frac{dx}{x+3}.$
 Оскільки $dx = d(x+3)$, то $2 \int \frac{dx}{x+3} = 2 \int \frac{d(x+3)}{x+3} = 2 \ln|x+3| + C.$
8. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}.$ Оскільки $d(x^3+1) = 3x^2 dx$, а $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3+1)$, то
 $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3+1)}{(x^3+1)} = \frac{1}{3} \ln|x^3+1| + C.$
9. $\int 3^{5x} dx = \frac{3^{5x}}{\ln 3} \cdot \frac{1}{5} + C = \frac{3^{5x}}{5 \ln 3} + C.$
10. $\int 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x dx = \int 30^x dx = \frac{30^x}{\ln 3} + C.$
11. $\int 2^{x^2} x dx.$ Оскільки $d(x^2) = 2x dx$, то $x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$, тому
 $\int 2^{x^2} dx = \int 2^{x^2} \cdot \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int 2^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C.$
12. $\int e^{-5x} dx = \frac{1}{-5} e^{-5x} + C = -\frac{e^{-5x}}{5} + C.$
13. $\int e^{-3x^2} x dx.$ Оскільки $d(-3x^2) = -6x dx$, а $x dx = -\frac{1}{6} d(-3x^2)$, тому
 $\int e^{-3x^2} dx = -\frac{1}{6} \int e^{-3x^2} d(-3x^2) = -\frac{1}{6} \cdot e^{-3x^2} + C.$
14. $\int \cos(5x-3) dx = \frac{1}{5} \sin(5x-3) + C.$
15. $\int \frac{\cos x dx}{3 \sin x - 1}.$ Оскільки $d(3 \sin x - 1) = 3 \cos x dx$, то $\cos x dx = \frac{1}{3} d(3 \sin x - 1)$,
 тому $\int \frac{\cos x dx}{3 \sin x - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3 \sin x - 1)}{3 \sin x - 1} = \frac{1}{3} \ln|3 \sin x - 1| + C.$

16. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$. Оскільки $d(x^3) = 3x^2 dx$, то $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$, тому
- $$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.$$
17. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C.$
18. $\int \frac{dx}{3x^2 - 9} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - 3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 - 8}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{8}{7}} \right| + C.$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{3} + C.$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 \left(\frac{1}{9} - x^2 \right)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \arcsin \frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3} \arcsin 3x + C.$
23. $\int \frac{dx}{16 + x^2} = \int \frac{dx}{4^2 + x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$
24. $\int \frac{dx}{25 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{25}{4} + x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{2x}{5} + C.$

Вправи

1. Знайти інтеграли (1 – 18):

1. $\int 3dx$; $\int -4dx$.
2. $\int 2xdx$; $\int 4t^3 dt$.
3. $\int \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + 5 \right) dx$; $\int (4x^3 - 6x^2 - 4x + 7) dx$.
4. $\int \frac{x^2 - x}{3x} dx$; $\int \frac{2t - 3t^3}{5t} dt$.
5. $\int \left(\frac{3}{x^4} + \frac{8}{x^5} \right) dx$; $\int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + 1 \right) dx$.
6. $\int \sqrt[4]{x^3} dx$; $\int 5x\sqrt{x} dx$.
7. $\int \frac{5dx}{1+x}$; $\int \frac{3dt}{2-t}$.
8. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; $\int \frac{x^2 dx}{8-x^3}$.
9. $\int 4^{2x} dx$; $\int 6^{\frac{x}{3}} dx$.
10. $\int 5^{x^3} x^2 dx$; $\int 7^{x^4} x^3 dx$.

11. $\int e^{\frac{x}{4}} dx; \int e^{-2x} dx.$
12. $\int e^{2x^2} x dx; \int e^{-x^3} x^2 dx.$
13. $\int \cos(2-3x) dx; \int \frac{dx}{\cos^2 5x}.$
14. $\int \frac{\sin x dx}{2-\cos x}; \int \frac{\cos x dx}{3+2 \sin x}.$
15. $\int \frac{dx}{x^2-9}; \int \frac{dx}{2x^2-7}.$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}; \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$
18. $\int \frac{dx}{25+x^2}; \int \frac{dx}{25+16x^2}.$

Метод підстановки у невизначеному інтегралі

Метод підстановки (заміни змінної) полягає у введенні нової змінної інтегрування, в наслідок чого заданий інтеграл зводиться до табличного або до такого, який легко зводиться до табличного. Він ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Нехай $F(x)$ - первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, тобто $\int f(x) dx = F(x) + C$, $x \in (a;b)$, і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку $(\alpha;\beta)$, причому множина значень цієї функції є проміжок $(a;b)$. Тоді справедлива формула $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$, $t \in (\alpha;\beta)$.

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int (7-2x)^3 dx$

$$\int (7-2x)^3 dx = \left| \begin{array}{l} 7-2x = u \\ -2dx = du \\ dx = -\frac{du}{2} \end{array} \right| = \int u^3 \cdot \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int u^3 du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{8} u^4 + C = -\frac{1}{8} (7-2x)^4 + C.$$

2. $\int \frac{dx}{(4-3x)^2}$

$$\int \frac{dx}{(4-3x)^2} = \int (4-3x)^{-2} dx = \left| \begin{array}{l} 4-3x = t \\ -3dx = dt \\ dx = \frac{dt}{-3} \end{array} \right| = \int t^{-2} \cdot \left(\frac{dt}{-3}\right) = -\frac{1}{3} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{3t} + C = \frac{1}{3(4-3x)} + C.$$

3. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2} dx$

$$\int \sqrt[3]{(3x+1)^2} dx = \int (3x+1)^{\frac{2}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} 3x+1=a \\ 3dx=da \\ dx=\frac{da}{3} \end{array} \right| = \int a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{da}{3} = \frac{1}{3} \int a^{\frac{2}{3}} da = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{5} + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{5} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^3}} = \int \frac{dx}{(3x-1)^{\frac{3}{2}}} = \int (3x-1)^{-\frac{3}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} 3x-1=t \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int t^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} + C = -\frac{2}{3\sqrt{3x-1}} + C.$$

5. $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$

$$\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} 2x^3+1=a \\ 6x^2 dx=da \\ x^2 dx=\frac{da}{6} \end{array} \right| = \int a^4 \cdot \frac{da}{6} = \frac{1}{6} \int a^4 da = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^5}{5} + C = \frac{1}{30} a^5 + C = \frac{1}{30} (2x^3+1)^5 + C.$$

6. $\int \frac{6z^2 dz}{(1-2z^3)^4}$

$$\int \frac{6z^2 dz}{(1-2z^3)^4} = \int (1-2z^3)^{-4} 6z^2 dz = \left| \begin{array}{l} 1-2z^3=a \\ -6z^2 dz=da \\ 6z^2 dz=-da \end{array} \right| = \int a^{-4} \cdot (-da) = -\int a^{-4} da = -\frac{a^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3a^3} + C =$$

$$= \frac{1}{3(1-2z^3)^3} + C.$$

7. $\int \sqrt{4x^3+1} x^2 dx$

$$\int \sqrt{4x^3+1} x^2 dx = \left| \begin{array}{l} 4x^3+1=a \\ 12x^2 dx=da \\ x^2 dx=\frac{da}{12} \end{array} \right| = \int \sqrt{a} \cdot \frac{da}{12} = \frac{1}{12} \int \sqrt{a} da = \frac{1}{12} \int a^{\frac{1}{2}} da = \frac{1}{12} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{18} \sqrt{a^3} + C =$$

$$\frac{1}{18} \sqrt{(4x^3+1)^3} + C.$$

8. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

9. $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$

$$\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1} = \left| \begin{array}{l} 5x^3+1=a \\ 15x^2 dx=da \\ x^2 dx=\frac{da}{15} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{da}{15}}{a} = \frac{1}{15} \int \frac{da}{a} = \frac{1}{15} \ln|a| + C = \frac{1}{15} \ln|5x^3+1| + C.$$

10. $\int 3^{5x^2} x dx$

$$\int 3^{5x^2} x dx = \left| \begin{array}{l} 5x^2=t \\ 10xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{10} \end{array} \right| = \int 3^t \cdot \frac{dt}{10} = \frac{1}{10} \int 3^t dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{1}{10} \cdot \frac{3^{5x^2}}{\ln 3} + C.$$

11. $\int e^{-3x^2+1} x dx$

$$\int e^{-3x^2+1} x dx = \left| \begin{array}{l} -3x^2+1=a \\ -6xdx=da \\ xdx=-\frac{da}{6} \end{array} \right| = \int e^a \cdot \left(-\frac{da}{6}\right) = -\frac{1}{6} \int e^a da = -\frac{1}{6} e^a + C = -\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} + C.$$

12. $\int x^3 \cos x^4 dx$

$$\int x^3 \cos x^4 dx = \left| \begin{array}{l} x^4=t \\ 4x^3 dx=dt \\ x^3 dx=\frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin x^4 + C.$$

13. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$

$$\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3} = \left| \begin{array}{l} x^3=t \\ 3x^2 dx=dt \\ x^2 dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{3}}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} t \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.$$

14. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}}$

$$\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}} = \left| \begin{array}{l} 3^x = t \\ 3^x \ln 3 dx = dt \\ 3^x dx = \frac{dt}{\ln 3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{\ln 3}}{\sqrt{25-t^2}} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{\sqrt{25-t^2}} = \frac{1}{\ln 3} \arcsin \frac{t}{5} + C = \frac{1}{\ln 3} \arcsin \frac{3^x}{5} + C.$$

15. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

$$\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x}{2} + C.$$

Вправи

1. Знайти такі інтеграли (1–14):

1. $\int (5t-1)^4 dt$; $\int (2-3x)^5 dx$.

2. $\int \frac{dx}{(4x+1)^4}$; $\int \frac{dz}{(2-3z)^5}$.

3. $\int \sqrt{(2x-1)} dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-7)^3}}$.

4. $\int (x^2+3)^5 x dx$; $\int 4(x^4-1)^2 x^3 dx$.

5. $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$; $\int \frac{x^3 dx}{(5x^4+3)^5}$.

6. $\int \sqrt{(t^4-1)^3} t^3 dt$; $\int \sqrt{e^x+1} e^x dx$.

7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$; $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$.

8. $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{3x}+1}$; $\int \frac{\cos x dx}{2 \sin x+1}$.

9. $\int 2^{x^4} x^3 dx$; $\int 7^{2x^2} x dx$.

10. $\int x^2 e^{x^3} dx$; $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

11. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; $\int x \cos(x^2+1) dx$.

12. $\int \frac{3x dx}{\cos^2 2x^2}$; $\int \frac{x dx}{\sin^2 2x^2}$.

13. $\int \frac{4^x dx}{\sqrt{9-16^x}}$; $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{25-4^x}}$.

14. $\int \frac{\cos x dx}{25+\sin^2 x}$; $\int \frac{\sin x dx}{9+\cos^2 x}$.

Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають неперервні похідні на деякому проміжку, тоді $d(uv) = u dv + v du$, $u dv = d(uv) - v du$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо $\int u dv = \int d(uv) - \int v du$, або $\int u dv = uv - \int v du$. Остання формула називається **формулою інтегрування частинами**. Вона дає змогу звести обчислення інтеграла $\int u dv$ до обчислення інтеграла $\int v du$.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, потрібно вдало вибрати u та dv . Щоб інтеграл, що стоїть справа у цій формулі, був простішим. Іноді цю формулу доводиться застосовувати кілька разів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

- 1) інтеграли виду $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin kx dx$, $\int P(x)\cos kx dx$, де $P(x)$ – многочлен, а k – дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv – вираз, що залишився;
- 2) інтеграли виду $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, де $P(x)$ – многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x) dx$;
- 3) інтеграли виду $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, де α, β – дійсні числа. Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклад 1. Знайти такі інтеграли:

1. $\int x \sin x dx$

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

2. $\int x \cos 2x dx$

$$\int x \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 2x dx \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos 2x + C = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

3. $\int (2x-5)e^{-3x} dx$

$$\int (2x-5)e^{-3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-5 \quad du = 2dx \\ dv = e^{-3x} dx \quad v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{array} \right| = (2x-5) \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) \cdot 2dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot (2x-5) + \frac{2}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cdot (2x-5) + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-3x} + C = -\frac{e^{-3x}}{3} \left(2x-5 + \frac{2}{3}\right) + C = -\frac{e^{-3x}}{9} (6x-13) + C = \frac{e^{-3x}}{9} (13-6x).$$

4. $\int (3x-4)\ln x dx$

$$\int (3x-4)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (3x-4) dx \quad v = \frac{3x^2}{2} - 4x \end{array} \right| = \ln x \cdot \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) - \int \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{3x}{2} - 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) \cdot \ln x - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + C = \left(\frac{3x^2}{2} - 4x\right) \cdot \ln x - \frac{3x^2}{4} + 4x + C.$$

$$5. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad v = -2\sqrt{1-x} \end{array} \right| = -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} - \int (-2\sqrt{1-x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + C.$$

$$6. \int \arccos x dx$$

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \cdot \arccos x +$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \cdot \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C =$$

$$x \cdot \arccos x - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$7. \int x \arctg x dx$$

$$\int x \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + C =$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C = \frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C.$$

$$8. \int e^x \sin 2x dx$$

$$\int e^x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad du = e^x dx \\ dv = \sin 2x \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = e^x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cdot e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad du = e^x dx \\ dv = \cos 2x \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^x \sin 2x - \int \frac{1}{2} e^x \sin 2x dx \right) = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx,$$

$$\text{Звідки } \int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x - \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx.$$

Дістали рівняння, з якого визначаємо шуканий інтеграл:

$$\int e^x \sin 2x dx + \frac{1}{4} \int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x.$$

$$\frac{5}{4} \int e^x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x + C.$$

$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^x \cos 2x + \frac{1}{4} e^x \sin 2x \right) + C.$$

$$\int e^x \sin 2x dx = -\frac{2}{5} e^x \cos 2x + \frac{1}{5} e^x \sin 2x + C = \frac{1}{5} e^x (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

Вправи

1. Знайти такі інтеграли (1 – 6):

1. $\int x \cos x dx$; $\int (1-x) \sin x dx$

2. $\int x \sin 2x dx$; $\int x \cos 3x dx$

3. $\int x e^x dx$; $\int x^2 e^{3x} dx$

4. $\int x \ln x dx$; $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$

5. $\int \arcsin x dx$; $\int \arctg x dx$

6. $\int e^x \cos x dx$; $\int e^x \sin x dx$

Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца.

Властивості визначених інтегралів

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3. Від переставлення меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на максимальному з відрізків $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то справедлива рівність (адитивність визначеного інтеграла):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5. Сталій множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$

6. Визначений інтеграл від суми інтегрованих функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

7. Якщо всюди на відрізку $[a;b]$ маємо $f(x) \leq g(x)$ ($a < b$), то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл $F(x)$, є **формула Ньютона – Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

Тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межах інтегрування.

Приклад 1. Обчислити такі визначені інтеграли:

1. $\int_2^3 x^2 dx$

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

2. $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + (-1) \right) = \left(\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) - \\ &- \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1 \right) = \frac{8}{3} + 4 + 2 + \frac{1}{3} - 1 + 1 = 9. \end{aligned}$$

3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \right) = -\frac{1}{2}(1-4) = \frac{3}{2}.$$

4. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$$\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_8^{27} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \Big|_8^{27} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_8^{27} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} \Big|_8^{27} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}) = \frac{3}{2}(9-4) = \frac{15}{2}.$$

5. $\int_1^3 e^{2x} dx$

$$\int_1^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^3 = \frac{1}{2}(e^{2 \cdot 3} - e^{2 \cdot 1}) = \frac{1}{2}(e^6 - e^2) = \frac{e^2}{2}(e^4 - 1).$$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln|1+2| - \ln|0+2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} \left(\cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \cos 4 \cdot 0 \right) = -\frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{4} (-1 - 1) = \frac{1}{2}.$$

8.
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

9.
$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

10.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Вправи

1. Обчислити такі визначені інтеграли (1 – 10):

1.
$$\int_1^2 x^3 dx; \int_1^3 x^4 dx.$$

2.
$$\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx; \int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx.$$

3.
$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2}; \int_0^4 \sqrt{x} dx.$$

4.
$$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx; \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

5.
$$\int_{-1}^1 e^x dx; \int_0^1 e^{3x} dx.$$

6.
$$\int_3^6 \frac{dx}{x}; \int_2^3 \frac{dx}{x-1}.$$

7.
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx.$$

8.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\cos^2 x}; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

9.
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$10. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}; \int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}.$$

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної

Приклад 1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли:

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4} = \left| \begin{array}{l} 3x+1=t \quad t_1=3 \cdot 0+1=1 \\ 3dx=dt \quad t_2=3 \cdot 1+1=4 \\ dx=\frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{dt}{3}}{t^4} = \int_1^4 \frac{dt}{3t^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-4+1}}{-4+1} \Big|_1^4 = -\frac{1}{9t^3} \Big|_1^4 = -\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{1^3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{64} - 1 \right) = -\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{63}{64} \right) = \frac{7}{64}.$$

$$2. \int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}} = \int_{-2}^5 (x+3)^{-\frac{2}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} x+3=t \quad t_1=-2+3=1 \\ dx=dt \quad t_2=5+3=8 \end{array} \right| = \int_1^8 t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \Big|_1^8 = \frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 = 3t^{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{t} \Big|_1^8 =$$

$$= 3 \cdot (\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$3. \int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$$

$$\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} 2x^3+1=a; \quad 6x^2 dx=da; \quad x^2 dx=\frac{da}{6}; \\ a_1=2 \cdot 0^3+1=1; \quad a_2=2 \cdot 1^3+1=3 \end{array} \right| = \int_1^3 a^4 \cdot \frac{da}{6} = \frac{1}{6} \int_1^3 a^4 da = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^5}{5} \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{243}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{242}{30} = \frac{121}{15} = 8 \frac{1}{15}.$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \sin x + 1} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} 3 \sin x + 1 = z \quad z_1 = 3 \sin 0 + 1 = 1 \\ 3 \cos x dx = dz \quad z_2 = 3 \sin \frac{\pi}{2} + 1 = 4 \\ \cos x dx = \frac{dz}{3} \end{array} \right| = \int_1^4 \sqrt{z} \cdot \frac{dz}{3} = \frac{1}{3} \int_1^4 z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \cdot z^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{z^3} \Big|_1^4 = \frac{2}{9} \cdot (\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{9} \cdot (8 - 1) = \frac{14}{9}.$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x} = \left| \begin{array}{l} 3 - \cos x = t \quad t_1 = 3 - \cos 0 = 2 \\ \sin x dx = dt \quad t_1 = 3 - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{5}{2} \end{array} \right| = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4}.$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} e^{\sin x} = u \\ e^{\sin x} \cos x dx = du \end{array} \quad \begin{array}{l} u_1 = e^{\sin 0} = e^0 = 1 \\ u_1 = e^{\sin \frac{\pi}{6}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{e}} du = u \Big|_1^{\sqrt{e}} = \sqrt{e} - 1.$$

$$7. \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} 2x = t \quad t_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \\ 2dx = dt \quad t_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$8. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = u; \quad \frac{dx}{2} = du; \quad dx = 2du; \\ u_1 = \frac{3}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad u_2 = \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2du}{\cos^2 u} = 2 \operatorname{tg} u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

$$= \frac{2(3 - \sqrt{3})}{3}.$$

$$9. \int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \left| \begin{array}{l} 4-9x^2 = 4\left(1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2\right); \\ u = \frac{3x}{2}; \quad du = \frac{3}{2}dx; \quad dx = \frac{2}{3}du; \\ u_1 = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad u_2 = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{2}{3}du}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}.$$

10. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2} = \left| \begin{array}{l} 9+16x^2 = 9\left(1+\left(\frac{4x}{3}\right)^2\right); \\ \frac{4x}{3} = u; \quad \frac{4dx}{3} = du; \quad dx = \frac{3}{4}du; \\ u_1 = \frac{4 \cdot \frac{3}{4}}{3} = 1; \quad u_2 = \frac{4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{3} = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4 \cdot \frac{3}{4} du}{9 \cdot (1+u^2)} = \frac{1}{3} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} u \Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} (\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}.$$

Вправи

1. Обчисліть за допомогою підстановок визначені інтеграли (1 – 10):

1. $\int_2^3 (2x-1)^3 dx; \int_4^5 (4-x)^3 dx.$

2. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1} dx; \int_0^5 \sqrt{3x+1} dx.$

3. $\int_{-1}^2 (x^2-1)^3 x dx; \int_0^2 9\sqrt{x^3+1} x^2 dx.$

4. $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x} \sin x dx;$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin z} \cos z dz.$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{2+\sin x}; \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3x^2 dx}{1+x^3}.$

7. $\int_0^{-\frac{1}{2}} e^{-2x} dx; \int_0^1 e^{x^2} x dx.$

$$7. \int_0^{\pi} \sin \frac{x}{3} dx; \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{12}} \cos 3x dx.$$

$$8. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}.$$

$$9. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}; \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{9-2x^2}}.$$

$$10. \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{6}} \frac{dx}{1+2x^2}; \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{4dx}{2+9x^2}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ та їх похідні $u'(x)$ та $v'(x)$ неперервні в проміжку $[a; b]$, то формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Приклад 1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли:

$$1. \int_0^{2\pi} x \cos 2x dx$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos x dx \quad v = \sin x \end{array} \right| = x \cdot \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x dx = (2\pi \cdot \sin 2\pi - 0 \cdot \sin 0) +$$

$$+ \cos x \Big|_0^{2\pi} = (0 - 0) + \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

$$2. \int_e^4 x \ln x dx$$

$$\int_e^4 x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_e^4 - \int_e^4 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \left(\frac{4^2}{2} \cdot \ln 4 - \frac{e^2}{2} \cdot \ln e \right) - \frac{1}{2} \int_e^4 x dx =$$

$$\left(8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_e^4 = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} (4^2 - e^2) = 8 \ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8 \ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}.$$

Вправи

1. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчисліть визначені інтеграли (1-4):

$$1. \int_0^1 \arcsin x dx.$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

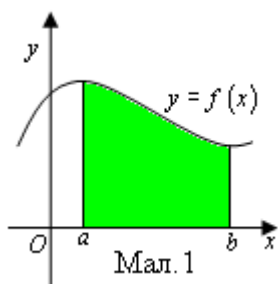
$$3. \int_0^1 x \arctg x dx.$$

$$4. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Застосування визначеного інтеграла

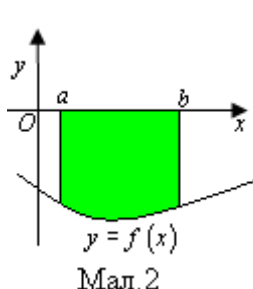
1. Площа плоскої фігури

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямими $x = a$ і $x = b$ та віссю Ox , то її площу обчислюється за



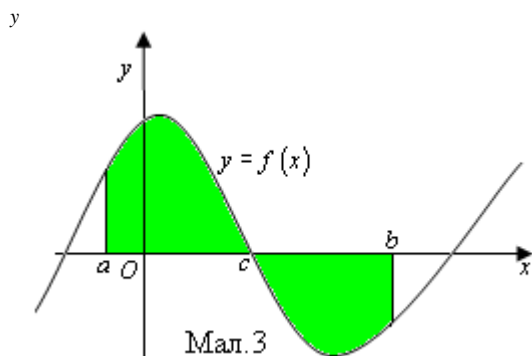
формулою $S = \int_a^b f(x) dx$.

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$,



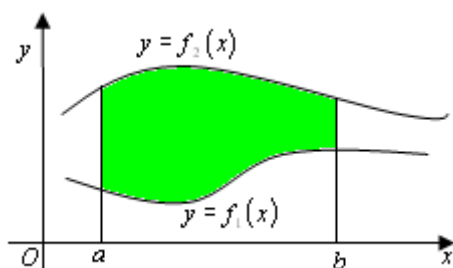
лежить під віссю Ox , то площу знаходять за формулою

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$,



розміщена з обох боків від осі Ox , то площу знаходять за формулою $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b |f(x)| dx$.

Якщо фігура обмежена двома кривими, що перетинаються, з яких $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, і прямими $x = a$ і $x = b$, де $a \leq x \leq b$ і $f_1(x) \leq f_2(x)$, тоді її

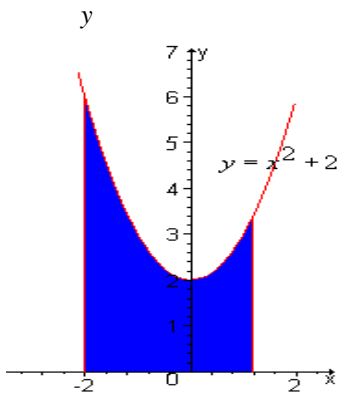


площу знаходимо за формулою $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених вказаними лініями:

1. $y = x^2 + 2$; $y = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



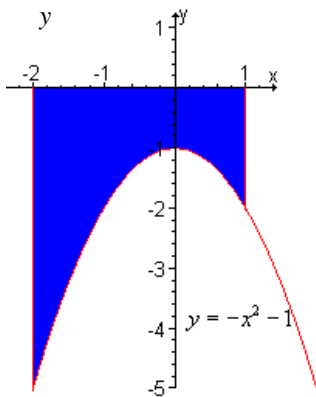
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою $y = x^2 + 2$, прямими $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ та віссю Ox , тому маємо:

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \left(\frac{(-2)^3}{3} + 2 \cdot (-2) \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) =$$

$$= \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} - 2 = 2\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{3} \text{ (кв.од.)}$$

2. $y = -x^2 - 1$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.



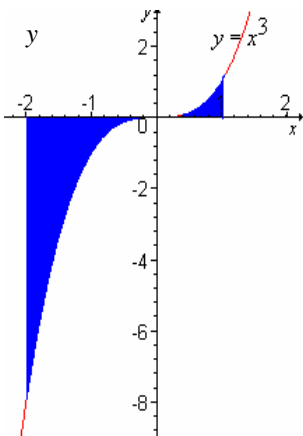
У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена під віссю Ox , тому маємо:

$$S = \int_{-2}^1 |-x^2 - 1| dx = \left| -\frac{x^3}{3} - x \right| \Big|_{-2}^1 = \left| -\frac{(-2)^3}{3} - 1 \cdot (-2) \right| -$$

$$- \left| \frac{0^3}{3} + 1 \cdot 0 \right| = \frac{8}{3} + 2 - 0 - 0 = 2\frac{2}{3} + 2 = 4\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

3. $y = x^3$; $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.

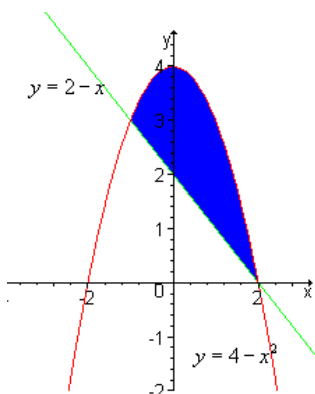


У цьому випадку потрібно обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена даними лініями та розміщена з обох боків від осі Ox , тому маємо:

$$S = \int_{-2}^0 |x^3| dx + \int_0^1 x^3 dx = \left| \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^0 + \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \left| \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right| + \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} =$$

$$= \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4} \text{ (кв.од.)}$$

4. $y = 4 - x^2$; $y = 2 - x$.



Виконаємо побудову фігури, яка обмежена заданими лініями.

Для визначення точок перетину заданих ліній розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2 - x. \end{cases}$$

Звідки знаходимо $4 - x^2 = 2 - x$;

$$x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

Тоді обчислимо площу шуканої фігури:

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (2 - x)) dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left(2 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 4 + 2 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 4,5 \text{ (â.â.ä.)}$$

2. Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \geq 0$ і прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy ,

знаходять за формулою $V = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$

Якщо навколо осі Ox обертається фігура, обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$, і прямими $x = a$, $x = b$, то об'єм утвореного тіла обертання обчислюється за

формулою $V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$

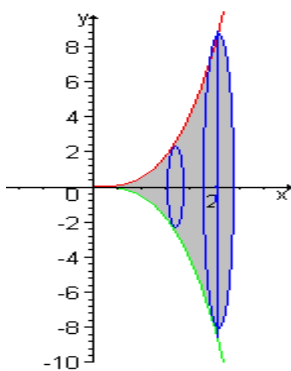
Якщо навколо осі Oy обертається фігура, обмежена кривими $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $\varphi_2(y) \geq \varphi_1(y) \geq 0$, і прямими $y = c$, $y = d$, то об'єм утвореного тіла обертання

обчислюється за формулою $V = \pi \int_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)) dy$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями:

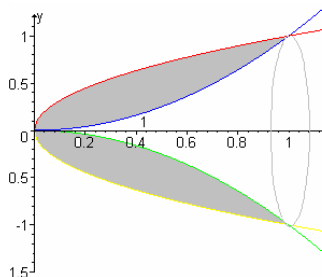
1. $y = x^3$; $y = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$, навколо осі Ox .

Зобразимо тіло, утворене внаслідок обертання фігури, яка обмежена заданими лініями, та обчислимо його об'єм



$$V = \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^2 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7} \Big|_0^2 = \frac{\pi}{7} (2^7 - 0^7) = \frac{\pi}{7} \cdot (128 - 0) = \frac{128\pi}{7} \text{ (куб.од.)}$$

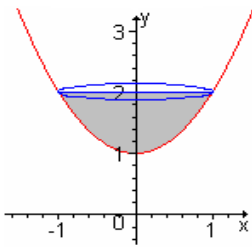
2. $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$, навколо осі Ox .



$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right] =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{3\pi}{10} \text{ (об'єм).}$$

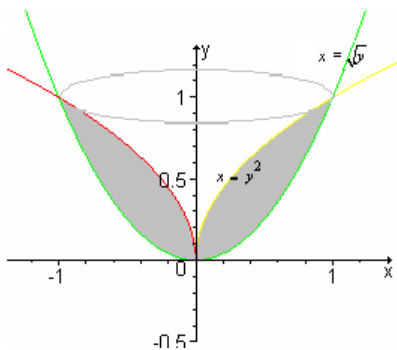
3. $y = x^2 + 1$; $y = 2$, навколо осі Oy .



$$V = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{y-1} \right)^2 dx = \pi \int_1^2 (y-1) dx = \pi \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\left(\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right) = \pi \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{2} \text{ (куб.од.)}$$

4. $y = x^2$; $x = y^2$, навколо осі Oy .



$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - (y^2)^2 \right) dy = \pi \int_0^1 (y - y^4) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^5}{5} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right] =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 0 + 0 \right) = \frac{3\pi}{10} \text{ (куб.од.)}$$

Вправи

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (1 – 7):

1. $y = x^2$, $y = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$;
2. $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
3. $y = -x^2 + 6$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$;
4. $y = x^3$, $y = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;
5. $y = \sin x$, $y = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$;
6. $y = \cos x$, $y = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$;
7. $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (1 – 4):

1. $y = -3x$, $y = 0$, $x = 2$;
2. $2x + 3y + 6 = 0$, $y = 0$, $x = 4$;
3. $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;
4. $y = x^2 - 4$, $y = 0$;

3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (1 – 7):

1. $y = x^3$, $y = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$;
2. $y = 4x^3$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$;
3. $y = x^3 - x$, $y = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

4. $y = x^3 - 4x, y = 0, x_1 = -2, x_2 = 2;$

5. $y = \sin x, y = 0, x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{2};$

6. $y = \cos x, y = 0, x_1 = 0, x_2 = \pi;$

7. $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{4}.$

4. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями (1 – 7):

1. $y = x^2 + 4x + 4, y = x + 4;$

2. $y = 2x^2 - x, y = 2x + 2;$

3. $y = \sqrt{x}, y = 0,5x;$

4. $y = 2 + x - x^2, y = 2 - x;$

5. $y = 4x - x^2, y = 4 - x;$

6. $y = 2x^2 - 3x + 3, y = 3 - x^2;$

7. $y = x^2 - 3x + 4, y = 4 - 2x^2.$

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями (1 – 8):

1. $y = x^2 + 1, y = 0, x_1 = 0, x_2 = 1;$

2. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1;$

3. $y = \sqrt{x}, y = 0, x_1 = 1, x_2 = 4;$

4. $y = 1 - x^2, y = 0;$

5. $xy = 1, y = 0, x_1 = 2, x_2 = 3;$

6. $y = x^3; y = 0; x_1 = 0; x_2 = 2;$

7. $y^2 - 3x = 0, x - 3 = 0;$

8. $y = \frac{1}{3}x^2, y = 0, x_1 = 0; x_2 = 3.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями (1 – 6):

1. $y = x^2 + 1, y_1 = 2, y_2 = 5;$

2. $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, y_1 = 2, y_2 = 0;$

3. $x^2 - 2y = 0, y - 2 = 0;$

4. $y = x^2, y = \frac{x^2 + 1}{2};$

5. $y = 3 - x^2, y = x^2 + 1;$

6. $y = \frac{6}{x}; x = 0; y_1 = 1; y_2 = 6;$