Диференціальні рівняння

Рівняння, в яких невідомими є функції, і в які входять не тільки незалежні змінні, самі функції, а і їхні похідні, або диференціали називаються **диференціальними рівняннями.**

Це означення в загальному випадку можна записати так:

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Диференціальне рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну і шукану функцію, проте, в обов'язковому порядку повинно містити похідну, або декілька похідних даної функції.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної або диференціала невідомої функції в даному рівнянні.

Рівняння $xy'' + 5x = e^{4x}$ – рівняння другого порядку, $4y''' + 5y = arctgx - 6$ – третього порядку, $4\dfrac{y}{x} + y' = 2x$ – першого порядку, $y^{\mathrm{IV}} + y''' - 5y = 7$ – четвертого порядку.

Розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається такий розв'язок, який містить скільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається такий розв'язок, який одержують з загального при різних числових значеннях довільних сталих. Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значення аргументу і функції.

Одночасне задання диференціального рівняння та відповідної кількості початкових умов називається **задачею Коші.**

Сформулюємо **основну теорему** теорії диференціальних рівнянь *(теореми існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння* $y' = f(x, y)$*): Якщо права частина* $f(x, y)$ *рівняння* $y' = f(x, y)$ *і її частинна похідна по* y $f'_y(x, y)$ *визначені і неперервні в деякій області* G *зміни змінних* x *і* y, *то, для будь-якої внутрішньої точки* (x_0, y_0) *цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок* $y = \phi(x)$, *що приймає значення* $y = y_0$ *при* $x = x_0$.

Ця теорема носить назву **теореми Коші.**

Точки площини, для яких не виконуються умови теореми Коші, називаються **особливими точками** диференціального рівняння.

Інтегральною кривою називається графік частинного розв'язку диференціального рівняння.

Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає сукупність (сім'я) всіх інтегральних кривих.

Розглянемо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$. Кожній точці $M(x, y)$ поставимо у відповідність відрізок, кутовий коефіцієнт якого дорівнює $f(x, y)$, тобто $\mathrm{tg}\alpha = f(x, y)$. Частина площини (чи вся площина), кожній точці якої відповідає відрізок так, що тангенс кута нахилу його до осі Ox дорівнює значенню в даній точці правої частини диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, називається **полем напрямів** даного диференціального рівняння. Отже, диференціальному рівнянню $y' = f(x, y)$ відповідає його поле напрямів. В цьому полягає **геометричний зміст диференціального рівняння.**

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальними рівняннями з **відокремлюваними змінними** називаються рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$ або $f_1(x) g_1(y) dx + f_2(x) g_2(y) dy = 0$, де всі вказані функції неперервні на певних проміжках.

Такі рівняння розв'язуються відокремленням змінних.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $(1+x)dy - ydx = 0$.

Розв'язання.

Поділимо ліву і праву частини рівняння на $(1+x)y$. Рівняння набере вигляду $\frac{(1+x)dy}{(1+x)y} - \frac{ydx}{(1+x)y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$. В рівнянні $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$ змінні відокремлені.

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|1+x| + C_1 \Rightarrow y = e^{\ln|1+x| + C_1} \Rightarrow y = e^{\ln|1+x|} e^{C_1} \Rightarrow y = |1+x| e^{C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{C_1}(1+x).$$

Замінивши $\pm e^{C_1}$ на C, одержимо загальний розв'язок рівняння $y = C(1+x)$.

2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння виду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x)$ і $q(x)$ – задані неперервні функції на деякому проміжку $(a;b)$, називаються **лінійними диференціальними рівняннями першого порядку.**

Рівняння даного типу розв'язуються за допомогою підстановки $y = uv$, де u і v нові невідомі функції (метод Бернуллі).

Приклад 2. Розв'язати лінійне диференціальну рівняння першого порядку

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x.$$

Розв'язання.

Поділимо на x і запишемо рівняння в стандартній формі $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$.

Маємо $p(x) = -\frac{4}{x}$, $q(x) = x^5 e^x$.

Виконаємо підстановку $y = uv$. Продиференціювавши $y = uv$, одержимо $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + uv'$. Підставляємо у рівняння $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$ замість $\frac{dy}{dx}$ та y їхні вирази: $u'v + uv' - \frac{4}{x} uv = x^5 e^x \Leftrightarrow u'v + u\left(v' - \frac{4}{x} v\right) = x^5 e^x$. Підберемо функцію v так, щоб вираз у дужках був рівним нулю: $v' - \frac{4}{x}v = 0.$ Розв'яжемо це рівняння з відокремлюваними змінними: $\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{x}v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx,$ інтегруємо $\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{4}{x}dx \Leftrightarrow \ln|v| = 4\ln|x| \Rightarrow |v| = x^4 \Rightarrow v = \pm x^4.$

При $v = \pm x^4$ рівність $u'v + u\left(v' - \frac{4}{x}v\right) = x^5 e^x$ набере вигляду $\pm x^4 u' = x^5 e^x \Rightarrow \pm x^4 \frac{du}{dx} = x^5 e^x \Rightarrow \pm du = xe^x dx.$ Інтегруємо останню рівність $\pm\int du = \int xe^x dx \Rightarrow \pm u = xe^x - e^x + C_1 \Rightarrow u = \pm xe^x \mp e^x + C_2.$ Записуємо відповідь $y = uv = \left(\pm xe^x \mp e^x + C_2\right)\cdot\left(\pm x^4\right) = x^5 e^x - x^4 e^x \pm C_2 x^4 = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4,$

$$y = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4.$$

3. Однорідні диференціальні рівняння

Однорідними диференціальними рівняннями називаються рівняння виду $y' = f(x;y),$ де $f(tx,ty) = f(x,y),$ при умові $t \neq 0.$

Однорідне диференціальне рівняння за допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u,$ або $y = ux,$ де $u -$ нова невідома функція, зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 3. Розв'язати лінійне однорідне диференціальну рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}.$$

Розв'язання.

Поділимо чисельник і знаменник правої частини рівняння на x^2: $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$ Виконаємо підстановку $\frac{y}{x} = u$. З рівності $y = ux$ маємо $\frac{dy}{dx} = y' = u'x + u.$

Рівняння набере вигляду $u'x + u = \frac{1+u}{u+u^2} = \frac{1+u}{u(1+u)} = \frac{1}{u},$ або $u'x = \frac{1-u^2}{u}.$

Відокремивши змінні і проінтегрувавши, матимемо

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1-u^2}{u} \Rightarrow \frac{udu}{1-u^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{udu}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-u^2\right)}{1-u^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ln\left|1-u^2\right| = 2\ln|x| + C_1 = \ln\left(C_2 x^2\right) \Rightarrow \frac{1}{\left|1-u^2\right|} = C_2 x^2 \Rightarrow \left|1-u^2\right| = \frac{C_3}{x^2} \Rightarrow \left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = \frac{C_3}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = C.$$

4. Рівнянням в повних диференціалах.

Рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$ де $P'_y(x;y) \equiv Q'_x(x;y),$ $(x;y) \subset D \subset R^2$ називається **рівнянням в повних диференціалах.**

Його загальний розв'язок знаходиться за формулою $\int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt = C.$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 2.$

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$.

Переконаємось, що це рівняння є диференціальним рівнянням в повних диференціалах.

$$\frac{dP}{dy} = \left(\cos x \sin x - xy^2\right)'_y = -2xy, \quad \frac{dQ}{dx} = \left(y(1-x^2)\right)'_x = -2xy.$$

Оскільки $\dfrac{dP}{dy} = -2xy = \dfrac{dQ}{dx}$, то рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}$ є рівняння в повних диференціалах.

Знаходимо його загальний розв'язок, використовуючи формулу $\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$. Припустимо, для простоти обчислень, $x_0 = 0,\ y_0 = 1$. Тоді,

$$\int\limits_{0}^{x} P(t,1)\,dt + \int\limits_{1}^{y} Q(x,t)\,dt = C_1; \quad \int\limits_{0}^{x} \left(\cos t \sin t - t \cdot 1^2\right)dt + \int\limits_{1}^{y} \left(t - tx^2\right)dt = C_1;$$

$$\left[\frac{\sin^2 t}{2} - \frac{t^2}{2}\right]_0^x + \left[(1-x^2)\frac{t^2}{2}\right]_1^y = C_1; \quad \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{x^2}{2} + (1-x^2)\frac{y^2}{2} - (1-x^2)\frac{1}{2} = C_1;$$

$$\sin^2 x - x^2 + y^2 - x^2y^2 - 1 + x^2 = C; \quad \sin^2 x + y^2 - x^2y^2 - 1 = C;$$

$$y^2 - x^2y^2 - \cos^2 x = C; \ y^2(1-x^2) - \cos^2 x = C.$$

Використовуючи початкову умову $y(0) = 2$, знаходимо сталу C:

$$2^2 \cdot (1-0^2) - \cos^2 0 = C \Leftrightarrow 4 - 1 = C \Leftrightarrow C = 3.$$

Отже, розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову $y(0) = 2,$ має вигляд

$$y^2(1-x^2) - \cos^2 x = 3.$$

Диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння, яке має похідні або диференціали не вище другого порядку, називається диференціальним рівнянням другого порядку.

1. **Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.**

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами називається рівняння виду $y'' + py' + qy = 0,$ де p і q сталі величини.

Для знаходження загального розв'язку цього рівняння, складають **характеристичне рівняння** $k^2 + pk + q = 0,$ яке дістають з диференціального рівняння заміною y'', y' і y на відповідні степені $k,$ причому сама функція y замінюється одиницею.

Загальний розв'язок диференціального рівняння будується залежно від коренів k_1 та k_2 характеристичного рівняння.

Тут можливі три випадки.

1. Корені k_1 і k_2 дійсні і різні. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння записується так: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$
2. Корені k_1 і k_2 дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння записується так: $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$.
3. Корені k_1 і k_2 комплексно спряжені: $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$. У цьому випадку загальний розв'язок рівняння записується так: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$

Приклад 5. Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами:

$a)\ 2y'' - 5y' - 3y = 0,\ b)\ y'' - 12y' + 36y = 0,\ c)\ y'' + 4y' + 7y = 0.$

Розв'язання.

a) Записуємо та розв'язуємо характеристичне рівняння.

$$2k^2 - 5k - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -\dfrac{1}{2}; \\ k_2 = 3. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні, тому загальний розв'язок записуємо у вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$: $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{3x}.$

b) Записуємо та розв'язуємо характеристичне рівняння.

$$k^2 - 12k + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 6; \\ k_2 = 6. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні, тому загальний розв'язок записуємо у вигляді $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$: $y = (C_1 + C_2 x)e^{6x}.$

c) Записуємо та розв'язуємо характеристичне рівняння.

$$k^2 + 4k + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -2 - \sqrt{3}i; \\ k_2 = -2 + \sqrt{3}i. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, тому загальний розв'язок записуємо у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x): \quad y = e^{-2x}\left(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x\right).$$

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами називається рівняння виду $y'' + py' + qy = f(x)$

Воно відрізняється від однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0,$ наявністю в правій частині деякої функції $f(x) \neq 0$.

Справедлива наступна **теорема.**

Якщо $\bar{y}(x)$ *частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння* $y'' + py' + qy = f(x)$, *а* $Y(x)$ *– загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння* $y'' + py' + qy = 0$, *то функція* $y = \bar{y}(x) + Y(x)$ *є загальним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння.*

Вкажемо форму, в якій потрібно шукати частковий розв'язок диференціального рівняння в залежності правої частини $f(x)$.

1. Права частина рівняння $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n$.

В цьому випадку частковий розв'язок знаходиться у вигляді $\bar{y} = Q_n(x)\cdot x^r$, де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що і $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння рівних нулю.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$$

Розв'язання.

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді $y = \bar{y}(x) + Y(x)$, де $\bar{y}(x)$ частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, $Y(x)$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + 4y' - 2y = 0$.

Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y' - 2y = 0$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$2k^2 - 3k + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -2 - \sqrt{6}; \\ k_2 = -2 + \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Корені дійсні і різні, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$Y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}: \ \ \mathrm{Y}(\mathrm{x}) = C_1e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Права частина рівняння $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ многочлен, тому частковий розв'язок знаходиться у вигляді $\bar{y} = Q_n(x)\cdot x^r$, де $Q_n(x)$ многочлен того ж степеня, що і $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння рівних нулю.

Оскільки характеристичне рівняння не має коренів рівних нулю, то $r = 0$. Тоді $\bar{y} = Q_n(x)\cdot x^0 = Ax^2 + Bx + C.$ Коефіцієнти A, B, C повинні бути такими, щоб функція $\bar{y} = Ax^2 + Bx + C$ задовольняла вихідне рівняння. Маємо $\bar{y}' = 2Ax + B, \bar{y}'' = 2A.$ Підставляємо $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ у вихідне рівняння та прирівнявши коефіцієнти при невідомих.

$$\bar{y}'' + 4\bar{y}' - 2\bar{y} = 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6.$$

Одержуємо систему рівнянь для знаходження A, B, C.

$$\begin{cases} -2A = 2; \\ 8A - 2B = -3; \\ 2A + 4B - 2C = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1; \\ B = -\dfrac{5}{2}; \\ C = -9. \end{cases}$$

Записуємо частинний розв'язок: $\bar{y} = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$

Записуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = \bar{y}(x) + Y(x) = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9 + C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x};$$

$$y = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9 + C_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

2. Права частина рівняння $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n, а коефіцієнт α в показнику дійсне число.

В цьому випадку частковий розв'язок знаходиться у вигляді $\bar{y} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^r$, де $Q_n(x)$ многочлен того ж степеня, що і $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які співпадають з коефіцієнтом α в показнику.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = e^{3x}$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_1 = -2i,\ k_2 = 2i.$ Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$Y(x) = e^{0x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Частковий розв'язок шукаємо у вигляді $\bar{y}(x) = Ae^{3x}$. Тоді $\bar{y}'(x) = 3Ae^{3x}$ і $\bar{y}''(x) = 9Ae^{3x}$. Підставивши у вихідне диференціальне рівняння $\bar{y},\ \bar{y}''$, будемо мати $9Ae^{3x} + 4 \cdot Ae^{3x} = e^{3x}$, або $13Ae^{3x} = e^{3x}$. Звідси $A = \frac{1}{13}$. Частковим розв'язком є $\bar{y}(x) = \frac{1}{13}e^{3x}$. Записуємо загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = e^{3x}$:

$$y = \bar{y}(x) + Y(x) = \frac{1}{13}e^{3x} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x;$$

$$y = \frac{1}{13}e^{3x} + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

3. Права частина рівняння $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$, де M, N і b – задані числа.

В цьому випадку частковий розв'язок знаходиться у вигляді $\bar{y} = (A\cos bx + B\sin bx) \cdot x^r$, де A і B невідомі коефіцієнти, а r – число коренів характеристичного рівняння, які співпадають з bi.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y' - 2y = \sin x$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 + k - 2 = 0$ має корені $k_1 = -2,\ k_2 = 1.$

Розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд:

$$Y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}.$$

Знайдемо частковий розв'язок у вигляді $\bar{y}=A\cos x+B\sin x$. Так як $\bar{y}'=-A\sin x+B\cos x,\ \bar{y}''=-A\cos x-B\sin x,$ то підставляючи у вихідне рівняння, матимемо $-A\cos x-B\sin x+-A\sin x+B\cos x-2(A\cos x+B\sin x)=\sin x,$ або $(-3A+B)\cos x+(-A-3B)\sin x=\sin x.$

Складаємо систему $\begin{cases}-3A+B=0;\\ -A-3B=1.\end{cases}$

Розв'язавши її, знайдемо $A=-\dfrac{1}{10},\ B=-\dfrac{3}{10}.$

Записуємо частковий розв'язок: $\bar{y}=-\dfrac{1}{10}\cos x-\dfrac{3}{10}\sin x.$

Записуємо загальний розв'язок рівняння $y''+y'-2y=\sin x$:

$$y=Y(x)+\bar{y}(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-\frac{1}{10}(\cos x+3\sin x).$$

Теорема. Якщо $\bar{y}_1$ є частковим розв'язком рівняння $y''+py'+qy=f_1(x),$ а $\bar{y}_2$ є розв'язком рівняння $y''+py'+qy=f_2(x),$ з однією й тією ж лівою частинами, то сума $\bar{y}_1+\bar{y}_2$ є частковим розв'язком рівняння $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x).$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'-3y=4x-5+6xe^{2x}.$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-2y'-3y=0.$ Характеристичне рівняння $k^2-2k-3=0$ має корені $k_1=-1,\ k_2=3,$ тому $Y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$

Права частина даного рівняння є сумою двох функцій $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, де $f_1(x)=4x-5,$ а $f_2(x)=6xe^{2x}$. Частковий розв'язок будемо шукати у вигляді $\bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2,$ де $\bar{y}_1=Ax+B$, а $\bar{y}_2=Cxe^{2x}+Ee^{2x}$. Підставляючи $\bar{y}=Ax+B+Cxe^{2x}+Ee^{2x}$, $\bar{y}',\ \bar{y}''$ у вихідне рівняння, і провівши групування подібних доданків, одержуємо

$$\bar{y}''-2\bar{y}'-3\bar{y}=-3Ax-2A-3B-3Cxe^{2x}+(2C-3E)e^{2x}=4x-5+6xe^{2x}.$$

З останньої тотожності слідує система $\begin{cases}-3A=4;\\ -2A-3B=-5;\\ -3C=6;\\ 2C-3e=0.\end{cases}$ Розв'язуючи її, одержуємо $A=-\dfrac{4}{3},\ B=\dfrac{23}{9},\ C=-2,\ E=-\dfrac{4}{3}.$

Тому,

$$\bar{y}=-\frac{4}{3}x+\frac{23}{9}-2xe^{2x}-\frac{4}{3}e^{2x}.$$

Маючи загальний розв'язок однорідного рівняння та частковий вихідного, можемо записати загальний розв'язок рівняння $y''-2y'-3y=4x-5+6xe^{2x}$:

$$y=Y\left(x\right)+\overline{y}\left(x\right)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{4}{3}x+\frac{23}{9}-2xe^{2x}-\frac{4}{3}e^{2x},$$

або

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{4}{3}x+\frac{23}{9}-\left(2x+\frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$

При розв'язуванні прикладних задач з використанням диференціальних рівнянь доречно користуватись наступними правилами.

Правило розв'язування геометричних задач

1. Позначити через $y=f\left(x\right)$ рівняння шуканої кривої та зобразити її на площині xOy у вигляді деякої кривої.
2. Взяти довільну точку $\left(x;y\right)$ шуканої кривої і, якщо передбачено умовою задачі, провести через неї деяку пряму (можливо дотичну або нормаль) та записати її рівняння, використовуючи геометричний зміст похідної.
3. За допомогою умови задачі скласти диференціальне рівняння, пов'язуючи всі введені величини.
4. Якщо передбачено умовою задачі, то виділити початкові умови.
5. Розв'язати та дослідити складене диференціальне рівняння.

Правило розв'язування фізичних задач

1. Визначити з яким фізичним законом пов'язана дана фізична задача.
2. Ввести незалежну змінну, шукану функцію, швидкість зміни цієї функції (тобто її похідну).
3. Визначити з яким фізичним законом пов'язана дана фізична задача.
4. Використовуючи умову задачі, пов'язати всі введені величини, тобто скласти диференціальне рівняння досліджуваного процесу.
5. Виділити початкову умову, якщо це передбачено умовою задачі.
6. Розв'язати складене диференціальне рівняння.

ЛГК №9. Диференціальні рівняння

1. Означення диференціального рівняння.
2. Порядок диференціального рівняння.
3. Розв’язок, загальний розв’язок, частинний розв’язок диференціального рівняння.
4. Задача Коші.
5. Теорема про існування і єдиність розв’язку диференціального рівняння.
6. Особливі точки диференціального рівняння.
7. Інтегральна крива.
8. Геометричний зміст диференціального рівняння.
9. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.
10. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
11. Однорідні диференціальні рівняння.
12. Рівняння в повних диференціалах.
13. Диференціальне рівняння другого порядку.
14. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.
15. Характеристичне рівняння.
16. Загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння при дійсних і різних коренях характеристичного.
17. Загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння при дійсних і рівних коренях характеристичного.
18. Загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння при комплексних коренях характеристичного.
19. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.
20. Теорема про загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
21. Форма часткового розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо права частина має вигляд $f(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x + a_n$.
22. Форма часткового розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.
23. Форма часткового розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо права частина має вигляд $f(x) = M \cos bx + N \sin bx$.
24. Правило розв’язування геометричних задач з використанням диференціальних рівнянь.
25. Правило розв’язування фізичних задач з використанням диференціальних рівнянь.