Похідна функції

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля і ця границя існує.

За означенням маємо: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$

Операція знаходження похідної функції $y = f(x)$ називається **диференціюванням.**

Функція $f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається **диференційованою** в точці x_0. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого інтервалу, то вона називається **диференційованою** на цьому інтервалі і позначається y'; y'_x; $\dfrac{dy}{dx}$; àáî f'; $f'(x)$; $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Основні правила диференціювання

1. Похідна суми, добутку, частки $(C = const)$

$$C' = 0; \qquad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C};$$

$$(u+v)' = u' + v'; \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \qquad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$$

$$(Cu)' = Cu';$$

2. Похідна складеної функції: якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, то $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$
3. Похідна оберненої функції: $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(x)}$, $\qquad \varphi'(x) \neq 0$

   де $x = f(y)$ є оберненою функцією до $y = f(x)$.

Всі формули справедливі, якщо розглядувані функції диференційовані.

Основні формули диференціювання

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}; \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad (\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \qquad (\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a; \qquad \left(e^x\right)' = e^x.$$

Похідною другого порядку від функції $y = f(x)$ є похідна від похідної $y'' = \left(f'(x)\right)'$.

Похідною $n-$ãî **порядку** від функції $y = f(x)$ є похідна від її $(n-1)-$¿ похідної $y^n = \left(f^{n-1}(x)\right)'$.

Геометричний зміст похідної

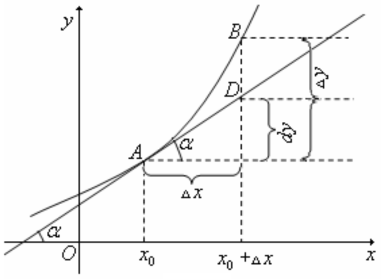

Рис.1

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в точці x_0, то $f'(x_0)$ дорівнює **кутовому коефіцієнту дотичної** до графіка цієї функції в точці $(x_0; f(x_0))$, тобто $f'(x_0)=k=\mathrm{tg}\alpha$, де α – кут, утворений дотичною з додатним напрямом осі Ox.

Рівняння дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$ має вигляд: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Нормаллю до кривої називається пряма, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної.

Оскільки кутові коефіцієнти дотичної і нормалі пов'язані між собою умовою перпендикулярності, то рівняння нормалі до кривої в точці $(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$$

Фізичний зміст похідної

Нехай залежність між шляхом s і часом t при прямолінійному русі виражається формулою $s=s(t)$, тоді **швидкість руху** в будь-який момент часу t – це похідна від пройденого шляху $s(t)$ за часом t

$$v=s'(t)$$

Прискорення руху в будь-який момент часу t – це похідна від швидкості $v(t)$ за часом t

$$a(t)=v'(t)=s''(t)$$

Економічний зміст похідної

Якщо на момент часу t виробник виробив $f(t)$ одиниць продукції, то відношення $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$, де $\Delta f(t)$ – приріст випущеної продукції за час Δt, називається **середньою продуктивністю праці** виробника за час Δt.

Продуктивність праці виробника в момент часу t обчислюється за формулою

$$p(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

Позначимо через $V(x)$; $D(x)$; $P(x)$ витрати, доход та прибуток виробництва x одиниць продукції. Тоді похідні $V'(x)$; $D'(x)$; $P'(x)$ дорівнюють **маргінальній вартості, доходу та прибутку,** відповідно.

Еластичністю функції $y=f(x)$ відносно змінної x позначають $E_X(y)$. Отже, еластичність

$$E_X(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y=(\ln x)'=\frac{y'}{y}$, тобто $E_x(y)=xT_y$

Нехай p – вартість одного виробу, а $x=f(p)$ – кількість виробів, що виготовлено і продано за деякий проміжок часу, тоді **еластичність попиту** визначається так: $\eta=\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}=\frac{p\cdot f'(p)}{f(p)}$

Диференціал функції

Диференціалом dy **функції** $y=f(x)$ в точці x називається головна, лінійна частина приросту функції $f(x)$ в цій точці: $dy=f'(x)\Delta x.$

Диференціал dy називають також **диференціалом першого порядку**.

Якщо $y = x,$ то $y' = x' = 1,$ тому $dy = dx = \Delta x,$ тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом $\Delta x.$ Тому диференціал будь-якої диференційованої функції $y = f(x)$ дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної: $dy = f'(x)dx$

З рівності $dy = f'(x)dx,$ одержимо, $f'(x) = \dfrac{dy}{dx},$ тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Геометричний зміст диференціала: диференціал функції в точці x дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці $(x; f(x)).$

Властивості диференціала

$$dC = 0;$$

$$d(Cu) = Cdu;$$

$$d(u+v) = du + dv;$$

$$d(uv) = vdu + udv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Приріст Δy функції $y = f(x)$ у точці x можна наближено замінити диференціалом dy в цій точці: $\Delta y \approx dy.$ Підставивши сюди значення Δy і $dy,$ дістанемо $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$ Останню формулу досить часто використовують при наближених обчисленнях з допомогою диференціала.

Монотонність функції

Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на інтервалі $(a;b),$ якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a;b),$ які задовольняють умову $x_1 < x_2,$ виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2),$ тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на інтервалі $(a;b),$ якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in (a;b),$ які задовольняють умову $x_1 < x_2,$ виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2),$ тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Зростаючі і спадні функції називаються **монотонними**, а інтервали на яких функції зростають або спадають називаються **інтервалами монотонності**.

Теорема *ознака монотонності функції.*

Якщо диференційована функція $y = f(x)$ ***зростає (спадає) на інтервалі*** $(a;b),$ ***то*** $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$ ***для будь-яких*** $x \in (a;b).$

Правило дослідження функції на монотонність

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти похідну даної функції.
3. Знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує.
4. Розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної.
5. На інтервалах, де $f'(x) > 0 -$ функція зростає, а де $f'(x) < 0 -$ функція спадає.

Екстремуми функції

Точка x_0 з області визначення функція $y = f(x)$ називається **точкою максимуму**, якщо існує такий $\delta -$окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки $x_0,$ що для всіх $x \ne x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0).$

Точка x_0 з області визначення функція $y=f(x)$ називається **точкою мінімуму**, якщо існує такий $\delta-$окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, що для всіх $x\neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x)>f(x_0)$.

Точки максимуму і мінімуму називаються **точками екстремуму** функції, а значення функції в цих точках – **екстремумами функції**.

Теорема *необхідна умова екстремуму.*

Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $y=f(x)$, визначеної в деякому околі точки x_0, і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.

Теорема *достатня умова екстремуму.*

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 і в її $\delta-$околі має похідні, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді:

a) якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y=f(x)$;

b) якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $y=f(x)$;

c) якщо існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0, в якому похідна $f'(x)$ зберігає свій знак, то в точці x_0 задана функція $y=f(x)$ екстремуму не має.

Теорема *достатня умова екстремуму.*

Якщо функція $y=f(x)$, визначена в деякому околі точки x_0, має першу і другу похідні і $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то у точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, причому максимум, якщо $f''(x_0)<0$, і мінімум, якщо $f''(x_0)>0$.

Перше правило знаходження екстремумів функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x_0)=0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує.
3. Якщо критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення цими критичними точками.
4. За зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Друге правило знаходження екстремумів функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки в яких похідна дорівнює нулю $f'(x_0)=0$.
3. Знайти другу похідну.
4. В кожній стаціонарній точці обчислити другу похідну: якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 є точкою мінімуму функції, а якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 є точкою максимуму функції; якщо друга похідна дорівнює нулю, то для знаходження екстремуму застосовують перше правило.

Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину.

Крива $y=f(x)$ називається **опуклою** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис.1).

Крива $y=f(x)$ називається **вгнутою** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис.2).

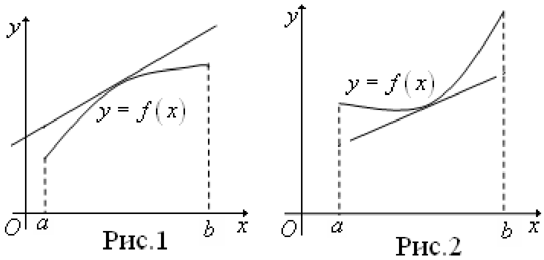

Рис.1 Рис.2

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої. Інтервали, на яких крива опукла або вгнута називаються **інтервали опуклості** функції. Зрозуміло, що в точці перегину дотична перетинає криву, оскільки з одного боку околу цієї точки графік кривої знаходиться під дотичною, а з другого – над дотичною.

Теорема *достатня умова опуклості графіка функції.*

Нехай функція $y=f(x)$, $x\in(a;b)$ має першу і другу похідні. Тоді, якщо $f''(x)<0$ для всіх $x\in(a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ графік функції $f(x)$ опуклий, якщо $f''(x)>0$ для всіх $x\in(a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ графік функції $f(x)$ вгнутий.

Теорема *достатня умова існування точки перегину.*

Якщо $f''(x)=0$ або $f''(x)$ не існує ($f(x)-$ неперервна) і друга похідна змінює знак при переході через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину.

Правило дослідження функції на опуклість і точки перегину

1. Знайти область визначення функції $y=f(x)$.
2. Знайти першу і другу похідні функції $y=f(x)$.
3. Знайти точки в яких друга похідна не існує або дорівнює нулю.
4. В кожному з інтервалів, на які розбивається інтервал $(a;b)$ знайденими критичними точками, встановити знак другої похідної.
5. Якщо в даному інтервалі $f''(x)>0,$ то на цьому інтервалі графік функції вгнутий, якщо ж $f''(x)<0,$ то опуклий.
6. З одержаних точок виділити ті, при переході через які друга похідна змінювала знак – це і є абсциси точок перегину.

Асимптоти графіка функції

Пряма називається **асимптотою** кривої або графіка функції $y=f(x)$, якщо відстань від точки $M(x; f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченість.

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними та похилими.

Вертикальною асимптотою кривої $y=f(x)$ називається пряма $x=x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to\pm x_0} f(x)=\infty.$

Похилою асимптотою кривої $y=f(x)$ називається пряма $y=kx+b,$ де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ та $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$. При цьому, якщо $k=0,$ то асимптота називається **горизонтальною**.

Найбільше і найменше значення функції

Функція $y=f(x)$ монотонна на відрізку $[a;b]$ найбільшого і найменшого значення набуває на кінцях цього відрізка.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значення

неперервної не монотонної функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти всі критичні точки на інтервалі $(a;b)$.
3. Обчислити значення функції в кожній знайденій критичні точці та на кінцях відрізка $[a;b]$.
4. Найбільше з отриманих значень є найбільшим значенням функції на відрізку (глобальним максимумом), а найменше – найменшим значенням функції на відрізку (глобальним мінімумом).

Підбір вправ по темі
“Диференціальне числення функції однієї змінної”

1. Знайти похідні функцій:

1. $y=\frac{1}{2}x;$
2. $y=\sqrt{5}x;$
3. $y=3x^2;$
4. $y=-\frac{x^2}{6};$
5. $y=\frac{5}{x^6};$
6. $y=x^{\frac{1}{3}};$
7. $y=5x^{-\frac{2}{5}};$
8. $y=3x^7-6x^5-4x^2+17;$
9. $y=\frac{1}{3}x^6-8\sqrt{x}+2x;$
10. $y=\left(x^3-2\right)\left(x^2+1\right);$
11. $y=\left(x^2-3x+1\right)\left(x^4-3x+2\right);$
12. $y=\sqrt{x}\left(3x^2+2\right);$
13. $y=\frac{2x+1}{3x-1};$
14. $y=\frac{2-x}{5x+1};$
15. $y=\frac{1-2x}{x^2};$
16. $y=\frac{x^2+5x}{x-3};$
17. $y=\frac{2x^2+3x}{x^2-4}.$

2. Знайти похідні функцій:

1. $y=\left(3-x\right)^5;$
2. $y=\left(6x^5-2x\right)^8;$
3. $y=\frac{1}{\left(x^2-3x\right)^3};$
4. $y=3\left(x-2\right)^5+2\left(1-x\right)^4;$

5. $y=\sqrt{2x-1}$;

6. $y=\sqrt{x^3-2x}$;

7. $y=\cos 5x$.

3. Записати рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1. $f(x)=\dfrac{3}{x},\ x_0=-1,\ x_0=1$;

2. $f(x)=2x-x^2,\ x_0=0,\ x_0=2$;

3. $f(x)=x^2+1,\ x_0=0,\ x_0=1$;

4. $f(x)=x^3-1,\ x_0=-1,\ x_0=2$.

4. Тіло масою 4 кг рухається за законом $x(t)=2t^3-2t^2+3$, де $x(t)$ вимірюється в метрах, $t-$в секундах. Знайти силу, що діє на тіло в момент часу $t=2$ с та кінетичну енергію.

5. Тіло масою 5 кг рухається за законом $x(t)=4t^3-3t^2+10t$, де $x(t)$ вимірюється в метрах, $t-$в секундах. Знайти силу, що діє на тіло в момент часу $t=2$ с та кінетичну енергію.

6. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

1. $f(x)=x^3-18x$;

2. $f(x)=12x+3x^2-2x^3$;

3. $f(x)=-x^2+2x-3$;

4. $f(x)=5x^2-3x+1$;

5. $f(x)=x^2(x-3)$;

6. $f(x)=x^3-27x$;

7. $f(x)=x^4-2x^2$.

7. Знайти екстремуми функції:

1. $y=3x^4+4x^3-36x^2+10$;

2. $y=x^4-4x^3-8x^2+12$;

3. $y=x^3-3x^2-72x-4$;

4. $y=x^4-2x^2+3$;

5. $y=x^4-4x^2$;

6. $y=x^3-27x$;

7. $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$;

8. $y=\dfrac{x^2+x+4}{x+1}$;

9. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

10. $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$;

11. $y=\dfrac{x^2+6x}{x-2}$;

12. $y=\dfrac{x^2-5x}{x+4}$.

8. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку:

1. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1,\ x\in[0;3]$;

2. $f(x)=2+3x^2-x^3,\ x\in[-1;1];$

3. $f(x)=2x^3-15x^2+24x+3,\ x\in[0;2];$

4. $f(x)=x^3-6x^2+9x+3,\ x\in[0;2];$

5. $f(x)=x^2-6x+13,\ x\in[0;6];$

6. $f(x)=6x^2-x^3,\ x\in[-1;6];$

7. $f(x)=-x^3-9x^2-24x+10,\ x\in[0;3];$

8. $f(x)=2x^3-3x^2,\ x\in[-1;4];$

9. $f(x)=2x^3-6x^2-18x,\ x\in[0;4];$

10. $f(x)=x^4-18x^2-5,\ x\in[-2;2].$

9. Знайти асимптоти графіка функції

1. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3};$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+5};$

3. $f(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x)};$

4. $f(x)=\dfrac{3-4x}{2+5x};$

5. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}.$

10. Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину:

1. $y=x^4-10x^3+36x^2-100;$

2. $y=3x^4-8x^3+6x^2+10;$

3. $y=x^4-6x^2+5;$

4. $y=x^6-10x^4;$

5. $y=x^3-6x^2+12x+4;$

6. $y=2x^2+\ln x;$

7. $y=xe^x;$

8. $y=\dfrac{x}{x^2+1};$

9. $y=\dfrac{1}{x+3}.$

11. За допомогою диференціала знайдіть наближені значення функції:

1) $f(x)=x^4+2x;\quad x=2,016;$

2) $f(x)=x^3-x;\quad x=0,92;$

3) $f(x)=x^2+3x;\quad x=1,995;$

4) $f(x)=x^5-x^2;\quad x=1,98.$