## Диференціальне числення функцій кількох змінних

**Функцією двох змінних** $f(x,y)$, $(x,y)\in G$ ($G-$множина) називається правило, яке кожній парі чисел $(x,y)\in G$ ставить у відповідність єдине число $f = f(x,y)\in M$ ($M-$множина). При цьому $x$ і $y$ називаються **незалежними змінними,** $f$ – **залежною змінною,** множина $G$ – **областю визначення** функції, множина $M$ – **областю значення** функції.

Точки, в яких функція кількох змінних не визначена, називаються **точками розриву** цієї функції.

**Околом точки** $P_0(x_0;y_0)$ називається внутрішня частина круга з центром в цій точці. Якщо радіус цього круга дорівнює $\delta$, то говорять про $\delta$-окіл точки $P_0(x_0;y_0)$.

Число $b$ називається **границею функції двох змінних** $z=f(x;y)=f(P)$ при $P\to P_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться такий $\delta$-окіл точки $P_0(x_0;y_0)$, що для будь-якої точки $P(x;y)$ цього околу (за виключенням, можливо, точки $P_0$) має місце рівність $\left|f(P)-b\right|<\varepsilon$, або $\left|f(x;y)-b\right|<\varepsilon.$ При цьому записують $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=b,$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=b.$

Границі функцій кількох змінних мають властивості аналогічні властивостям границі функції однієї змінної.

**Приклад 1.** Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2}.$

Розв’язання.

Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}.$ Щоб позбутися невизначеності, помножимо чисельник і знаменник виразу, що стоїть під знаком границі, на вираз спряжений до чисельника, тобто на вираз $\sqrt{x^2+y^2+9}+3.$ Тоді будемо мати:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2+9}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)}{\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)}=$$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2+9-9}{\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2+9}+3\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

Функція $f(x,y)$, $(x,y)\in G$ називається **неперервною в точці** $(x_0,y_0)\in G,$ якщо для будь-якої послідовності точок $(x_n,y_n)\in G$ такої, що $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ при $n\to\infty$, послідовність $\{f(x_n,y_n)\}$ збігається і

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=f(x_0,y_0).$$

Функція $f(x,y)$ називається **неперервною на множині** $G,$ якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

**Частинною похідною** від функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній $x$ називається похідна $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$, обчислена при сталому $y$.

**Частинною похідною** від функції $z = f(x; y)$ по незалежній змінній $y$ називається похідна $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y)$, обчислена при сталому $x$.

Для частинних похідних справедливі звичайні правила та формули диференціювання.

**Приклад 2.** Знайти частинні похідні функції $z = x^3 y^2 + x^4 y + y^4$.

Розв'язання.

Частинну похідну $z'_x$ знаходимо як похідну функції $z$ за аргументом $x$, у припущенні, що $y = \text{const}$. Тому

$$z'_x = 3x^2 y^2 + 4x^3 y.$$

Аналогічно

$$z'_y = 2x^3 y + x^4 + 4y^3.$$

Якщо існує частинна похідна по $x$ від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають **частинною похідною другого** порядку від функції $f(x, y)$ по змінні $x$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, або $f''_{xx}$.

Якщо існує частинна похідна по $y$ від функції $\frac{\partial f}{\partial y}$, то її називають **частинною похідною другого** порядку від функції $f(x, y)$ по змінні $y$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або $f''_{yy}$.

Якщо існує частинна похідна по $y$ від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають **мішаною частинною похідною** другого порядку від функції $f(x; y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або $f''_{xy}$.

Якщо існує частинна похідна по $x$ від функції $\frac{\partial f}{\partial y}$, то її називають **мішаною частинною похідною** другого порядку від функції $f(x; y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, або $f''_{yx}$.

**При умові неперервності мішаних** частинних похідних другого порядку має місце рівність $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, яка означає, що мішана частинна похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функції.

**Диференціалом** диференційованої функції $z = f(x;y)$ у точці $(x_0;y_0)$ називають вираз

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy,$$

або, в скороченому вигляді,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

При наближених обчисленнях широко використовується рівність:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

**Приклад 3.** Знайти наближене значення функції $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ в точці $M_1(1{,}01;1{,}98)$.

Розв'язання.

Потрібне значення заданої функції знайдемо за формулою

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Нехай $M(1;2)$, тоді $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta y = -0{,}02$. Звідси:

$$z(M) = x^2 + 2xy + 3y^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 = 1 + 4 + 12 = 17,$$

$$z'_x = 2x + 2y,\ z'_y = 2x + 6y,$$

$$z'_x(M) = 2x + 2y = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 6,$$

$$z'_y(M) = 2x + 6y, = 2\cdot 1 + 6\cdot 2 = 2 + 12 = 14.$$

Підставляємо ці значення у формулу

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

і одержуємо:

$$z(M_1) \approx 17 + 6\cdot 0{,}01 + 14\cdot(-0{,}02) = 17 + 0{,}06 - 0{,}28 = 17 - 0{,}22 = 16{,}78.$$

$$z \approx 16{,}78.$$

**Дотичною площиною** до поверхні $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ називається площина, яка містить в собі всі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

**Рівняння дотичної площини** до поверхні $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0),$$

де $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}$ – значення частинних похідних в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

**Нормаллю до поверхні** називається пряма, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини.

**Рівняння нормалі до поверхні** $z = f(x;y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{-1},$$

де $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}$ – значення частинних похідних в точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$.

Якщо поверхня задана у неявні формі рівнянням $F\left(x;y;z\right)=0$, то **рівняння дотичної площини** в точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ цієї поверхні має вигляд:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}\left(x-x_0\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}\left(y-y_0\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}\left(z-z_0\right)=0,$$

а **нормалі** –

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}},$$

де $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}$ – значення частинних похідних в точці $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$.

**Приклад 4.** Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=\sin\left(xy\right)$ в точці $M_0\left(\frac{\pi}{3};-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв’язання.

Точка дотику має координати $\left(\frac{\pi}{3};-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos\left(xy\right);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\cos\left(xy\right).$$

Обчислюємо значення частинних похідних в точці $\left(\frac{\pi}{3};-1\right)$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=-\frac{1}{2};\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=\frac{\pi}{6}.$$

Підставляючи у формулу $z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}\left(x-x_0\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}\left(y-y_0\right)$ знайдені значення, одержуємо рівняння шуканої дотичної площини:

$z+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\left(y+1\right)$, або, спростивши, $3x-\pi y+6z=2\pi-3\sqrt{3}$.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-\frac{\pi}{3}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{\frac{\pi}{6}}=\frac{z+\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1},\text{ або }\frac{6x-2\pi}{-3}=\frac{6y+6}{\pi}=\frac{6z+3\sqrt{3}}{-6}.$$

Частина простору, кожній точці $P$ якого відповідає числове значення деякої скалярної величини $u$ називається **скалярним полем.**

Поряд з скалярними полями в просторі розглядають також **плоскі скалярні поля.** Плоске скалярне поле визначається як частина площини, кожній точці $P$ якої відповідає числове значення скалярної величини $z$. Функція плоского скалярного поля залежить від двох змінних: $z = f(x;y)$.

Частинну похідну функції $u = f(x;y;z)$ за **напрямом вектора** $\vec{l} = (l_x;l_y;l_z)$ знаходять за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha$, $\cos$, $\beta\cos\gamma$ напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|};\ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|};\ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

**Градієнтом** в точці $P(x,y,z)$ скалярного поля, заданого диференційованою функцією $u = f(x,y,z)$, називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних функції $u$ в точці $P$:

$$f'_x(x,y,z)\vec{i} + f'_y(x,y,z)\vec{j} + f'_z(x,y,z)\vec{k}.$$

**Градієнт функції** $u = F(x,y,z)$ будемо позначати так:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Напрям найбільшої швидкості зміни функції співпадає з напрямом градієнта, а величина цієї найбільшої швидкості зміни функції дорівнює довжині вектора $grad\ u$, тобто $|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

**Приклад 5.** Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точці $P_0(2;-1;1)$.

Розв’язання.

Знаходимо частинні похідні: $f'_x = 2x$, $f'_y = 4y$, $f'_z = -2z$.

Обчислюємо значення частинних похідних в точці $P_0(2;-1;1)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P_0} = 2\cdot 2 = 4,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{P_0} = 4\cdot(-1) = -4,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{P_0} = -2\cdot 1 = -2.$$

Величину найбільшої швидкості зміни функції в точці $P_0$ знаходимо за формулою:

$$|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

$$|grad\ u| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6\ \left(\textit{одиниць виміру}\right).$$

## ЛГК №6. Диференціальне числення функцій кількох змінних

1. Означення функції двох змінних.
2. Точки розриву функції кількох змінних.
3. $\delta$-*окіл* точки $P_0\left(x_0;y_0\right)$.
4. Означення границі функції двох змінних.
5. Неперервність функції двох змінних в точці та на множині.
6. Частинні похідні.
7. Частинні похідні другого порядку.
8. Мішані частинні похідні другого порядку.
9. Диференціал функції двох змінних.
10. Застосування диференціала до наближених обчислень.
11. Дотична площина до поверхні.
12. Рівняння дотичної площини до поверхні.
13. Нормаль до поверхні та її рівняння.
14. Скалярні поля.
15. Градієнт функції.
16. Точка максимуму функції двох змінних.
17. Точка мінімуму функції двох змінних.
18. Точки екстремуму функції двох змінних.
19. Необхідна умова екстремуму.
20. Стаціонарні точки функції двох змінних.
21. Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.
22. Правило дослідження функції двох змінних на екстремум.
23. Умовний екстремум.
24. Знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа.
25. Відшукання найбільшого і найменшого значення функції двох змінних у обмеженій замкненій області.

1. Знайти область визначення функції: $a)\ f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$; $b)\ f(x,y)=2\sqrt{xy}$; $c)\ f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $d)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-25}$; $e)\ f(x,y)=2\ln(1+xy)$.
2. Знайти границю функції: $a)\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 1}}\left(xy+2x^2-12\right)$; $b)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{2x^2+4y^2}$; $c)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \pi}}\dfrac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$.
3. Знайти частинні похідні першого та другого порядків від заданих функцій: $a)\ f(x,y)=3\sin\left(x^4+y^3\right)-4x^2+3xy^3-8$; $b)\ f(x,y)=2\ln\left(x^2y\right)+5x^2y-3x+9$; $c)\ f(x,y)=3\sin(xy)-4x^2y+3xy^3-8$; $d)\ f(x,y)=3\ln\left(x^4+y^3\right)-4x^2y^2+3xy^3+4$; $e)\ f(x,y)=3e^{x^4+y^3}-14x^2y5+3x^3y^3-8x-4y+235$; $f)\ f(x,y)=\dfrac{2x}{x+2y}$.
4. Обчислити наближено $1{,}01^{3{,}05}$, виходячи із значення функції $z=x^y$ при $x=1$, $y=3$, замінюючи її приріст диференціалом.
5. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1{,}01^2+0{,}04^2}$, виходячи із значення функції $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$ при $x=1$, $y=0$, замінюючи її приріст диференціалом.
6. Знайти наближене значення функції $z=2x^2+2xy+y^3+3$ в точці $M_1(1{,}01;1{,}96)$.
7. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=f(x,y)$ в точці $M(x_0,y_0)$: $a)\ f(x,y)=x^2-y^2,\ M(-2{,}1)$; $b)\ f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},\ M(1,2)$; $c)\ f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2},\ M(0,2)$; $d)\ f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right),\ M(1,-2)$.
8. Знайти градієнт і похідну функції $z=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{4}xy^3+4$ в заданій точці $M(1,-1)$ в напрямі вектора $\vec{l}$, який утворює кут $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ з додатнім напрямом осі $Ox$.
9. Дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремум: $a)\ f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y+3$; $b)\ f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$; $c)\ f(x,y)=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$; $d)\ f(x,y)=\cos x+\cos y$; $e)\ f(x,y)=x^3-3xy+y^3$; $f)\ f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{8}{x}-y$.
10. Знайти екстремум функції $z=xy$ при умові, що $x$ і $y$ зв’язані рівнянням $2x+3y-5=0$.
11. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x,y)=x-x^2+y^2$ в прямокутнику $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.
12. Знайти максимум і мінімум функції $f(x,y)=\sin x\cos x$ в трикутнику, який обмежений координатними осями та прямою $x+y=2\pi$.
13. Знайти найбільше значення функції $f(x,y)=xy-x^3y^3$ в квадраті $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$.

14.