Екстремум функції двох змінних

Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається **точкою максимуму** функції $z=f(x;y)$, якщо значення функції в цій точці більше, ніж її значення в будь-якій іншій точці $M(x;y)$, деякого околу точки M_0, тобто $f(x_0,y_0)>f(x,y)$, для всіх точок $M(x;y)$, які задовольняють умову $M_0M<\delta$, де δ деяке додатне, можливо досить мале, число.

Точка $M_0(x_0;y_0)$ називається **точкою мінімуму** функції $z=f(x;y)$, якщо значення функції в цій точці менше, ніж її значення в будь-якій іншій точці $M(x;y)$, деякого околу точки M_0, тобто $f(x_0,y_0)<f(x,y)$, для всіх точок $M(x;y)$, які задовольняють умову $M_0M<\delta$, де δ деяке додатне, можливо досить мале, число.

Максимум і мінімум функції називаються її **екстремумом.** Точка M_0, в якій функція має екстремум, називається **точкою екстремуму.**

Необхідна умова екстремуму

Теорема. Якщо диференційована функція $z=f(x;y)$ досягає екстремум в точці $M_0(x_0;y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$

Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними точками**. Не всяка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних

Нехай в околі критичної точки $M_0(x_0;y_0)$ функція $z=f(x;y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Позначимо $A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$ і складемо детермінант $\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2.$

Якщо $\Delta>0$, то функція в точці M_0 має екстремум, а саме максимум при $A<0$ (або $C<0$) і мінімум при $A>0$ (або $C<0$).

Якщо $\Delta<0$, то функція в точці M_0 екстремумів не має.

Якщо $\Delta=0$, то потрібно проводити подальші дослідження (сумнівний випадок).

Правило дослідження функції двох змінних на екстремум

1. Знайти частинні похідні першого порядку $f'_x(x;y)$, $f'_y(x;y)$ функції $z=f(x;y)$.
2. Розв'язуючи систему рівнянь
$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0; \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$$
визначити стаціонарні точки даної функції.

3. Обчислити частинні похідні другого порядку в стаціонарній точці $(x_0; y_0)$:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

4. Визначити знак виразу $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$

   а) Якщо $\Delta > 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою екстремуму, а саме: точкою мінімуму при $A > 0$ і точкою максимуму при $A < 0$.

   б) Якщо $\Delta > 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою екстремуму, а саме: точкою мінімуму при $A > 0$ і точкою максимуму при $A < 0$.

   в) Якщо $\Delta < 0$, то в точці (x_0, y_0) екстремум відсутній.

5. Обчислити значення $f_{\min}$ і $f_{\max}$.

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $z = f(x; y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку $f'_x(x; y)$, $f'_y(x; y)$ функції $z = f(x; y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$:

$$f'_x = 2x - y + 9, \quad f'_y = -x + 2y - 6.$$

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0; \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ та знайдемо стаціонарні точки даної функції:

$$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0; \\ -x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 18 = 0; \\ -x + 2y - 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 12 = 0; \\ x - 2y + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -12; \\ 2y = x + 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4; \\ y = 1. \end{cases}$$

Точка $P_0(-4;1)$ підозріла на екстремум.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку в стаціонарній точці $P_0(-4;1)$:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 2.$$

Визначаємо знак виразу $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$, то точка $P_0(0;3)$ є точкою екстремуму, а саме: точкою мінімуму тому, що $A = 2 > 0$.

Знаходимо значення функції в точці $P_0(-4;1)$:

$$z_{\max} = f(-4;1) = (-4)^2 - (-4) \cdot 1 + 1^2 + 9 \cdot (-4) - 6 \cdot 1 + 20 = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1.$$

Знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

Екстремум функції $z = f(x; y)$ при виконанні умови $\varphi(x; y) = 0$ називають **умовним екстремумом.**

Алгоритм знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

1. Записати функцію Лагранжа у вигляді

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y).$$

2. Використовуючи необхідні умови існування екстремуму, знайти критичні точки $P_k(x_k;y_k;\lambda_k)$ функції Лагранжа: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x;y) = 0. \end{cases}$

3. Перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:
   а) якщо в точці $P_k(x_k;y_k;\lambda_k)$ визначник третього порядку $\Delta(P_k) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_k) & \varphi'_y(P_k) \\ \varphi'_x(P_k) & L''_{xx}(P_k) & L''_{xy}(P_k) \\ \varphi'_y(P_k) & L''_{xy}(P_k) & L''_{yy}(P_k) \end{vmatrix}$ додатній, то точка $P_k(x_k;y_k;\lambda_k)$ є точкою максимуму і $z_{\max} = f(P_k) = f(x_k;y_k)$;
   б) якщо в точці $P_k(x_k;y_k;\lambda_k)$ визначник третього порядку $\Delta(P_k) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(P_k) & \varphi'_y(P_k) \\ \varphi'_x(P_k) & L''_{xx}(P_k) & L''_{xy}(P_k) \\ \varphi'_y(P_k) & L''_{xy}(P_k) & L''_{yy}(P_k) \end{vmatrix}$ від'ємний, то точка $P_k(x_k;y_k;\lambda_k)$ є точкою мінімуму і $z_{\min} = f(P_k) = f(x_k;y_k)$.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при умові, що $x + y - 1 = 0$.

Розв'язання.

Функція Лагранжа має вигляд
$$L(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Необхідні умови існування екстремуму запишуться у вигляді:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \lambda = 0; \\ 2y + \lambda = 0; \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Для знаходження критичних точок функції Лагранжа розв'яжемо систему $\begin{cases} 2x + \lambda = 0; \\ 2y + \lambda = 0; \\ x + y - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0; \\ x + y - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}; \\ y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Отже, критична точка функції Лагранжа $P\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\lambda = -1$.

Тому функція Лагранжа буде мати вигляд $L(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 - (x + y - 1)$.

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму в критичній точці знайдемо потрібні похідні в довільній точці $P(x;y)$:

$$\varphi'_x(P)=2x-1;\ \varphi'_y(P)=2y-1;\ L''_{xx}=2=A;\ L''_{xy}=0=B;\ L''_{yy}=2=C.$$

Запишемо та обчислимо визначник третього порядку в довільній точці $P(x;y)$

$$\Delta(P)=\begin{vmatrix} 0 & 2x-1 & 2y-1 \\ 2x-1 & 2 & 0 \\ 2y-1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4-0=4>0,\ \ A=2>0,$$

Отже, існує максимум функції

$$z_{\max}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Правило відшукання найбільшого і найменшого значення функції $z=f(x;y)$ в обмеженій замкненій області

1. Знайти критичні точки заданої функції всередині даної області й обчислити значення функції в цих точках.
2. Визначити найбільше і найменше значення функції на межі області.
3. Серед одержаних значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в трикутнику, який обмежений прямими $x=0,\ y=0,\ x+y+3=0.$

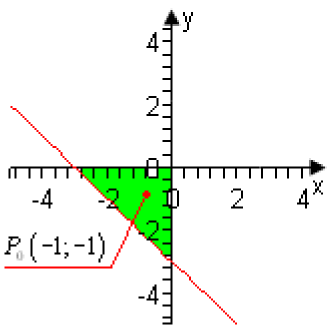
Розв’язання.

Знайдемо стаціонарні точки, які лежать всередині трикутника

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2+y^2-xy+x+y\right)'_x=2x-y+1;\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2+y^2-xy+x+y\right)'_y=2y-x+1.$$

Прирівнюючи похідні до нуля, для знаходження стаціонарних точок, маємо систему:

$$\begin{cases}2x-y+1=0;\\ 2y-x+1=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=-1;\\ x-2y=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1;\\ y=-1.\end{cases}$$



Стаціонарна точка $P_0(-1;-1)$ лежить всередині трикутника тому.

Знайдемо значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ у точці $P_0(-1;-1)$:

$$z(-1;-1)=(-1)^2+(-1)^2-(-1)\cdot(-1)+(-1)+(-1)=$$
$$=1+1-1-1-1=-1.$$

Тепер будемо досліджувати функцію $z=x^2+y^2-xy+x+y$ на сторонах трикутника – його межі.

На замкненому відрізку BC функція z приймає вигляд $z=y^2+y$ тому, що $x=0$ на цьому відрізку.

Критичною буде точка $z'=2y+1=0\Rightarrow y=-\frac{1}{2},\ \ M_1\left(0;-\frac{1}{2}\right).$

Маємо: $z\left(0;-\frac{1}{2}\right)=0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\left(-\frac{1}{2}\right)=0+\frac{1}{4}-0+0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$

На замкненому відрізку AB функція z приймає вигляд $z = x^2 + x$ тому, що $y = 0$ на цьому відрізку.

Критичною буде точка $z' = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},\ M_2\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Маємо: $z\left(-\frac{1}{2};0\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

На відрізку AC $y = -3 - x$ і функція набуває вигляд $z = x^2 + (-3-x)^2 - x\cdot(-3-x) + x + (-3-x) = 3x^2 + 9x + 6$.

Знайдемо критичні точки цієї функції.

$$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2};\quad y = -3 - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.\ M_3\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right).$$

Знайдемо значення функції в цій точці:

$$z\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізків:

$$z(A) = z(-3;0) = (-3)^2 + 0^2 - (-3)\cdot 0 + (-3) + 0 = 9 - 3 = 6.$$

$$z(B) = z(0;0) = 0^2 + 0^2 - 0\cdot 0 + 0 + 0 = 0.$$

$$z(C) = z(0;-3) = 0^2 + (-3)^2 - 0\cdot(-3) + 0 + (-3) = 9 - 3 = 6.$$

Серед отриманих значень обираємо найбільше і найменше:

$\max z(-3;0) = z(0;-3) = 6;$

$\min z(-1;-1) = -1.$

Вправи

1. Знайти екстремуми функцій:
   1. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8.$
   2. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1.$
   3. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y - 1.$
   4. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5.$
   5. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4.$
   6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1.$
   7. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2.$
   8. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5.$
   9. $z = 4 - 5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y.$
   10. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2.$
   11. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1.$
   12. $z = 6xy - 2x^2 - y^2 - 14x + 5.$
   13. $z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 1.$
2. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при умові, що $x + y + 3 = 0.$
3. Знайти екстремум функції $z = x^2 - y^2$ при умові, що $2x - y - 3 = 0.$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 3xy$ в трикутнику, який обмежений прямими $0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2.$
5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x + y + xy$ в трикутнику, який обмежений прямими $x = 1,\ \ x = 2,\ \ y = 2,\ \ y = 3.$
6. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в трикутнику, який обмежений прямими $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y + 3 = 0.$
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в трикутнику, який обмежений прямими $x = 1,\ \ y = 1,\ \ x + y = 1.$

Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

12.1. $z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y$.

12.2. $z = (x-1)^2 + 4y^2$.

12.3. $z = (x+3)^2 + (y-2)^2$.

12.4. $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$.

12.5. $z = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$.

12.6. $z = 2x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x + 16y + 19$.

12.7. $z = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y - 80$.

12.8. $z = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 6y + 7$.

12.9. $z = 3x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 5$.

12.10. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$.

12.11. $z = x^3 + 3xy^2 - 18x^2 - 18y^2$.

12.12. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

12.13. $z = e^{-x^2}(x^2 + 2y^2)$.

12.14. $z = e^{-y^2}(3x^2 + y^2)$.

12.15. $z = e^{-x^2}(x^2 + y^2)$.

12.16. $z = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \left(x + y - \frac{3}{2}\right)$.

12.17. $z = x^3 + 3x^2 - 4y^2 + 8y$.

12.18. $z = x^2 + y^3 + xy$.

12.19. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

12.20. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

12.21. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

12.22. $z = xy^2(1 - x - y)$.

12.23. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$; $(x > 0, y > 0)$.

12.24. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

12.25. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

12.26 $z = e^{-y^2}(2x^2 + y^2)$.

12.27. $z = x^2 + 2y^2 - 8\ln x - 64\ln y$; $(x > 0, y > 0)$.

12.28 $z = x^2 + (y-1)^2$.

12.29. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

12.30 $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

Дослідити на умовний екстремум функцію при заданому рівнянні зв'язку

13.1. $z = 6 - 4x - 3y$,	$x^2 + y^2 = 1$.
13.2. $z = 2x + y - z + 1$,	$x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$.
13.3. $z = x + 2y$,	$x^2 + y^2 = 5$.
13.4. $z = xy$,	$x^2 + y^2 = 2$.
13.5. $z = 2xy$,	$(x-1)^2 + y^2 = 1$.
13.6. $z = x^2 - y^2$,	$2x - y - 3 = 0$.
13.7. $u = xyz$,	$x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
13.8. $u = \ln x + \ln y + \ln z$,	$x + y + z = 1 \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.
13.9. $u = x^2 + y^2 + z^2$,	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
13.10. $u = xyz$,	$x^2 + y^2 + z^2$.
13.11. $u = x + y + z^2$,	$x - z - y + xz + 2 = 0$.
13.12. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9$,	$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \quad (x \neq 0)$.
13.13. $u(x,y,z) = xy + xz + yz$,	$2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0$.
13.14. $z = x + y$,	$xy = 9$.

13.10. $u = xyz,$ $x^2 + y^2 + z^2.$

13.11. $u = x + y + z^2,$ $x - z - y + xz + 2 = 0.$

13.12. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9,$ $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \quad (x \neq 0).$

13.13. $u(x, y, z) = xy + xz + yz,$ $2x^3 y^2 z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17 = 0.$

13.14. $z = x + y,$ $xy = 9.$

13.15. $u = xyz,$ $xy + xz + yz - 27 = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13.16. $u = 2x^3 + 2y^3 + 6x + 6y,$ $x^2 + y = 2.$

13.17. $u = 2x + y - z + 1,$ $x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$

13.18. $z = xy,$ $x^3 + y^3 - xy = 0.$

13.19. $u = xy^2 z^3,$ $x + y^2 + z^3 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13.20. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4,$ $x + y + 3 = 0.$

13.21. $z = 2xy,$ $x^2 + y - 3 = 0.$

13.22. $z = 4xy,$ $x^2 + y^2 = 1.$

13.23. $z = xy,$ $2x + 3y - 5 = 0.$

13.24 $u = xy + yz,$ $x^2 + y^2 + y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13.25. $u = \ln xy^2 z^3,$ $x + 2y + 3z - 6 = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

13.26. $u = 2x + y - 2z,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 36.$

13.27. $z = 5 - 3x - 4y,$ $x^2 + y^2 = 1.$

13.28 $u = y^2 + 4z - 4yz - 2xz - 2xy,$ $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1.$

13.29. $u = x + y + z,$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$

13.30. $u = 16x^2 + 9y^2 + 4z^2 - (4x^2 + 3y^2 + 2z^2)^2,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області D:

14.1. $z = x^2 + y^2 - xy - 5x - 4y + 10;$ $D: x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 4.$

14.2. $z = 2x^2 + y^2 - 6xy;$ $D: x \leq 0, \quad y \leq 0, \quad x + y \geq -1.$

14.3. $z = 4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y;$ $D: x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad y - x \geq -1.$

14.4. $z = (x-2)^2 + 2y^2;$ $D: -1 \leq x \leq 1, \quad -2 \leq y \leq 2.$

14.5. $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8;$ $D: -3 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 0.$

14.6. $z = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7;$ $D: x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2.$

14.7. $z = x^3 - 3x^2 y + 3y + 5;$ $D: -2 \leq x \leq 3, \quad -1 \leq y \leq 1.$

14.8. $z = xy;$ $D: x^2 + y^2 \leq 4.$

14.9. $z = xy^2;$ $D: x^2 + y^2 \leq 1.$

14.10. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y;$ $D: x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 3.$

14.11. $z = x^2 - 2y^2 + 5x;$ $D: x \geq -1, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$

14.12. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y;$ $D: x^2 + y^2 \leq 25.$

14.13. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;$ $D: -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4.$

14.13. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;$ $D: -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4.$

14.14. $z = x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 2y + 8;$ $D: 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2.$

14.15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2;$ $D: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x.$

14.16. $z = 3x^2 + y - 8x - 2x\sqrt{y} + 8;$ $D: 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4.$

14.17. $z = x^2 + y^2 + 9x - xy - 6y + 20;$ $D: -4 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 2.$