

Типові задачі “Площина та пряма в просторі”

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-3;2;1)$ та $M_2(4;-1;2)$.

$$\frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z-1}{2-1};$$

$$\frac{x+3}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}.$$

2. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}$ та $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}$.

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6 - 2 + 4}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{8}{7\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{7 \cdot 6} = \frac{4\sqrt{6}}{21}.$$

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4;-3;2)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(-2;3;-1)$.

$$-2(x-4) + 3(y+3) - 1(z-2) = 0;$$

$$-2x + 3y - z + 19 = 0.$$

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-3;2;1)$, $M_2(2;-1;0)$, $M_3(1;-1;2)$.

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 2+3 & -1-2 & 0-1 \\ 1+3 & -1-2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad -6x - 9y - 3z + 3 = 0; \quad 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

5. Обчислити кут між прямою $\frac{x+5}{-3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ і площиною $x + 2y - 3z - 6 = 0$.

$$\sin \varphi = \frac{|-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-3 - 2 - 6|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{11}{14}.$$

6. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;1;3)$ і паралельна вектору $\vec{q}(4;-5;-6)$.

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-3}{-6}.$$

7. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;-1)$ і паралельна прямій

$$\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2};$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{2}.$$

8. Знайти відстань між площинами $2x - y + 3z = 5$ і $3x - 2y - z = 12$.

Розв'язання.

Виберемо довільну точку в площині $2x - y + 3z = 5$, наприклад, $(1;0;1)$. Відстань між площинами буде дорівнювати відстані від точки $(1;0;1)$ до площини $3x - 2y - z = 12$.

Використавши формулу $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знаходимо:

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 - 0 - 1 - 12|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10 \cdot \sqrt{14}}{14} = \frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

