Пряма в просторі

1. **Параметричне рівняння прямої.**
   Якщо пряма задана у просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ (будь-який ненульовий вектор паралельний прямій називається її **напрямним вектором**), а точка $M(x, y, z)$ – будь-яка точка цієї прямої, тоді запис рівнянь прямої у вигляді
$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \quad -\infty < t < \infty \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$$
   називається **параметричними рівняннями прямої.**
2. **Канонічними рівняннями прямої,** яка проходить через задану точку і паралельно заданому вектору, має вигляд:
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$
3. **Рівняння прямої, яка проходить через дві точки** $A_1(x_1, y_1, z_1)$ **та** $A_2(x_2, y_2, z_2)$ мають вигляд:
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$
4. **Загальне рівняння прямої в просторі.** Рівнянням прямої – перетину двох площин, заданих загалними рівняннями, буде система:
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2;0;-3)$ та $M_2(-3;2;-1)$.

Розв'язання.

Використовуючи координати заданих точок і рівняння прямої, що проходить через ці точки, одержимо:

$$\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z+3}{-1+3};$$

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} - \text{канонічне рівняння прямої.}$$

Використовуючи рівності $\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} = t$ одержимо параметричне рівняння цієї прямої у вигляді:

$$\begin{cases} x - 2 = -5t; \\ y = 2t; \quad t \in (-\infty; \infty). \\ z + 3 = 2t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 5t; \\ y = 2t; \quad t \in (-\infty; \infty). \\ z = -3 + 2t; \end{cases}$$

Отже, ця пряма проходить через точку $M_1(2;0;-3)$ паралельно $\vec{s}(-5;2;2)$.

Напрямні косинуси прямої

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, то пряма має дві трійки напрямних косинусів:

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\ \cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Приклад 2. Обчислити кути, які утворює пряма $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{6}$ з координатними осями.

Розв’язання.

За формулами напрямних косинусів маємо:

$$\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{3}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{3}{7};$$

$$\cos\beta=\pm\frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{2}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{2}{7};$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{6}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\pm\frac{6}{7}.$$

Кут між двома прямими

Розглянемо дві прямі l_1 та l_2, які задані канонічними рівняннями

$$(l_1)\quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ та } (l_2)\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут між прямими дорівнює куту між їхніми напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ та $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Приклад 3. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{2}$ та $\frac{x+1}{12}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{4}$.

Розв’язання.

Запишемо напрямні вектори прямих $\vec{s_1}=(2;1;2)$ та $\vec{s_2}=(12;3;4)$. Підставивши у формулу $\cos\varphi=\frac{\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\cdot|\vec{s_2}|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$ координати векторів $\vec{s_1}$ та $\vec{s_2}$, матимемо:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot12+1\cdot3+2\cdot4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=\frac{24+3+8}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{144+9+16}}=\frac{35}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{169}}=\frac{35}{3\cdot13}=\frac{35}{39}=0,8974.$$

Умова паралельності і перпендикулярності двох прямих

Прямі l_1 та l_2 **паралельні** тоді і тільки тоді, коли їхні напрямні вектори колінеарні:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Прямі l_1 та l_2 **перпендикулярні** при умові, що їхні напрямні вектори $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ та $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$ перпендикулярні:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Приклад 4. Довести, що прямі $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-4}$ і $\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{2}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання.

Запишемо напрямні вектори прямих $\overrightarrow{s_1}=(-2;3;-4)$ та $\overrightarrow{s_2}=(5;6;2)$. Перевіримо умову перпендикулярності $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$:

$-2\cdot5+3\cdot6+(-4)\cdot2=-10+18-8=0,$ оскільки умова перпендикулярності виконується, то прямі перпендикулярні.

Вправи

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;1;3)$ і паралельна вектору $\vec{q}=(4;-5;-6)$.
2. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;1;3)$ та $M_2(-3;2;-1)$.
3. Скласти канонічне та параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $A(-2;-1;-3)$ та $B(0;2;1)$.
4. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $M(2;-3;-2)$.
5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;-3;-1)$ і паралельна прямій $\frac{x-4}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$.
6. Обчислити кути, які утворює пряма $\frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{12}$ з координатними осями.

Площина в просторі

1. **Нормальне рівняння площини.**

Ненульовий вектор $\vec{n}(A;B;C)$, перпендикулярний до площини називається **нормальним** вектором площини.

Рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ є рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і перпендикулярна до даного вектора $\vec{n}(A;B;C)$.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2;1;3)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(2;1;-2)$.

Розв'язання.

Рівнянням площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і перпендикулярна до даного вектора $\vec{n}(A;B;C)$ має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Підставивши в це рівняння координати точки M і вектора $\bar{n},$ будемо мати:

$2(x+2)+1(y-1)-2(z-3)=0;$

$2x+y-2z+9=0.$

2. **Загальне рівняння площини.**

Рівняння $Ax+By+Cz=D$ називається **загальним** рівнянням площини.

При $D=0$ площина проходить через початок координат.

3. **Рівняння площини, що проходить через три точки.**

Рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1),$ $M_2(x_2;y_2;z_2),$ $M_3(x_3;y_3;z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1;2;-2),$ $M_2(-1;2;3),$ $M_3(3;-2;1).$

Розв’язання.

Рівняння площини, яка проходить через три точки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Підставляючи координати точок $M_1(-1;2;-2),$ $M_2(-1;2;3),$ $M_3(3;-2;1)$ матимемо:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+2 \\ -1+1 & 2-2 & 3+2 \\ 3+1 & -2-2 & 1+2 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & -4 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}+(z+2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=0;$$

$(x+1)\cdot(0+20)-(y-2)\cdot(0-20)+(z+2)\cdot 0=0;$

$20\cdot(x+1)+20\cdot(y-2)+0=0;$

$20x+20+20y-40=0;$

$20x+20y-20=0;$

$x+y-1=0.$

4. **Рівняння площини у відрізках на осях.**

При побудові площини зручно користуватися рівнянням площини у відрізках на осях:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{\tilde{n}}=1,$$

де a, b, c – відрізки, які відтинає площина від відповідних осей Ox, Oy, Oz.

Приклад 3. Знайти точки перетину площини $5x-15y+20z-100=0$ з осями координат.

Розв'язання.

Запишемо рівняння даної площини у відрізках на осях. Для цього перенесемо вільний член у праву частину і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$5x-15y+20z=100;$$

$$\frac{5x}{100}-\frac{15y}{100}+\frac{20z}{100}=1;$$

$$\frac{x}{20}-\frac{y}{\frac{20}{3}}+\frac{z}{5}=1.$$

Отже, координати точок $A_x(20;0;0)$, $A_y\left(0;\frac{20}{3};0\right)$, $A_y(0;0;5)$.

Кут між двома площинами

Кут між двома площинами, які задані рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ та $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ відповідно, знаходиться за формулою:

$$cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Умова перпендикулярності і паралельності площин

Умовою перпендикулярності площин є рівність:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Відстань від точки до площини.

Нехай точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ не належить площині, яка задана рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, тоді **відстань від точки до площини** знаходиться за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Приклад 4. Знайти відстань між площинами $2x-y+3z=5$ і $3x-2y-z=12$.

Розв'язання.

Виберемо довільну точку в площині $2x-y+3z=5$, наприклад, $(1;0;1)$. Відстань між площинами буде дорівнювати відстані від точки $(1;0;1)$ до площини $3x-2y-z=12$. Використавши формулу $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знаходимо:

$$d=\frac{|3\cdot 1-2\cdot 0-1\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{|3-0-1-12|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{10}{\sqrt{14}}=\frac{10\cdot\sqrt{14}}{14}=\frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

Вправи

1. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;-1;-4)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+5}{3}$.
2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;-2)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(-3;1;-2)$.
3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-3;1)$, $M_2(3;-2;3)$, $M_3(0;2;1)$.
4. Знайти точки перетину площини $6x-12y+18z-72=0$ з осями координат.
5. Знайти відстань між площинами $3x-2y-2z=7$ і $5x-3y-z=15$.

Пряма і площина в просторі
Кут між прямою і площиною

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою і її проекцією на площину.

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, а площина – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, то синус кута між ними знаходять за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Приклад 1. Обчислити кут між прямою $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{2}$ і площиною $x+2y-3z+4=0$.

Розв'язання.

Скористаємось формулою $\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Оскільки $A=1,\ B=2,\ C=-3,\ m=3,\ n=4,\ p=2,$ то

$$\sin\varphi=\frac{|1\cdot 3+2\cdot 4+(-3)\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2+2^2}}=\frac{|3+8-6|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{406}}=0,2482.$$

$\varphi=14^\circ 22'$.

Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, а площина – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, то:

умова **паралельності** прямої і площини:

$$Am+Bn+Cp=0$$

умова **перпендикулярності** прямої і площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

Приклад 2. Переконайтеся в тому, що пряма $\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$ паралельна площині $5x-2y+7z+3=0$.

Розв’язання.

Використовуючи умову паралельності прямої і площини, дістанемо $5\cdot 4+(-2)\cdot 3+7\cdot(-2)=20-6-14=0,$ тобто пряма і площина паралельні.

Приклад 3. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;2;-3)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{2}$.

Розв’язання.

За нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини можна взяти паралельний йому напрямний вектор $\vec{q}(4;3;2)$ даної прямої. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через дану точку M перпендикулярно до вектора $\vec{q}$:

$4(x+1)+3(y-2)+2(z+3)=0;$

$4x+3y+2z+4=0.$

Вправи

1. Обчислити кут між прямою $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{4}$ і площиною $2x-3y-2z+5=0$.
2. Обчислити кут між прямою $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ і площиною $6x-3y-2z=0$.
3. Обчислити кут між прямою $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$ і площиною $2x+y+z+5=0$.