# Елементи аналітичної геометрії

Аналітичною геометрією називається розділ математики в якому вивчаються властивості геометричних об'єктів (точок, прямих, площин, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) з використанням апарату алгебри на основі методу координат.

## Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1. **Відстань між двома точками.**

   Нехай дано точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, то відстань між ними обчислюється за формулою

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. **Ділення відрізка у заданому відношенні.**

   Якщо відомі координати кінців відрізка $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, то координати точки $M(x;y)$, що поділяє відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\lambda$, знаходять за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

   Якщо точка $M$ поділяє відрізок $M_1M_2$ навпіл, тоді її координати будуть:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

**Приклад 1. З**найти відстань між точками $M_1(4;6)$ та $M_2(2;1)$, а також координати точки $M$, що поділяє відрізок $M_1M_2$ у відношенні $\frac{1}{2}$.

Розв'язання.

Знайдемо довжину відрізка $M_1M_2$:

$|M_1M_2|=\sqrt{(2-4)^2+(1-6)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$

Враховуючи, що $\lambda=\frac{1}{2}$, підставимо у формули щоб одержати координати точки $M$:

$$x=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5\cdot 2}{3}=\frac{10}{3};\qquad y=\frac{6+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{13}{3}.$$

Отже, $M\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$.

## Різні види рівнянь прямої на площині

1. Рівняння виду

$$Ax+By+C=0$$

   називається **загальним рівнянням прямої**, в якому коефіцієнти $A$ та $B$ не дорівнюють одночасно нулю.

2. Якщо пряма на площині визначається точкою $M_0(x_0; y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s}(a;b)$ – це вектор, який паралельний прямій, то рівняння

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases}$$

називаються **параметричними рівняннями прямої.**

3. **Нормальне рівняння прямої.**

   **Нормальним вектором** прямої називається будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний до цієї прямої.

   Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1)$ і має заданий нормальний вектор $\vec{n} = (A, B)$ має вигляд

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

4. **Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** має вигляд

$$y = kx + b, \text{де } k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$$

5. **Пряма, яка проходить через дану точку** $M_1(x_1, y_1)$ **і має кутовий коефіцієнт** $k$ записується у вигляді

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

6. **Канонічне рівняння прямої.**

   **Напрямним вектором** прямої називається будь-який ненульовий вектор $\vec{n} = (a, b)$, паралельний цій прямій)

   Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1)$ і має заданий напрямний вектор записується так

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

   і називається **канонічним** рівнянням прямої.

7. **Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки** $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

8. **Рівняння прямої у відрізках на осях**. Рівняння прямої, яка відтинає на осі абсцис відрізок рівний $a$, а на осі ординат відрізок рівний $b$, тобто проходить через точки $A(a,0)$ і $B(0,b)$, має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

### Кут між прямими

1. Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ відповідно, то **косинус кута** між ними знаходиться за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2. Якщо прямі $l_1$ і $l_2$ задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом: $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$, то **тангенс кута** $\varphi$ між ними знаходиться за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

3. **Умова паралельності прямих:**
   1. Нехай є дві прямі $y_1 = k_1 x + b_1$ та $y_2 = k_2 x + b_2$, то умова паралельності має вигляд $k_1 = k_2$.
   2. Якщо прямі задані за допомогою загальних рівнянь: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то умова паралельності набирає вигляду $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.
4. **Умова перпендикулярності прямих:**
   1. Нехай є дві прямі $y_1 = k_1 x + b_1$ та $y_2 = k_2 x + b_2$, то умова перпендикулярності має вигляд $k_1 \cdot k_2 = -1$.
   2. Якщо прямі задані за допомогою загальних рівнянь: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то умова перпендикулярності набирає вигляду $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Якщо прямі задані іншими рівняннями, то їх завжди можна звести до рівняння прямих з кутовим коефіцієнтом.

5. **Відстань** $d$ **від заданої точки** $M_0(x_0, y_0)$ **до прямої,** яка задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Приклад 2.** У трикутнику $ABC$ відомі координати вершин $A(9,1)$, $B(-3,-4)$, $C(-7,-1)$. Знайти:

1. довжину сторони $BC$;
2. рівняння сторони $BC$;
3. рівняння висоти $AH$, проведеної з точки $A$;
4. довжину висоти, проведеної з точки $A$;
5. рівняння бісектриси $BD$ внутрішнього кута $B$ трикутника;
6. площу трикутника;
7. кут $B$ у радіанах з точністю до двох знаків;
8. рівняння прямої, яка проходить через точку $A$ і паралельно до сторони $BC$;
9. рівняння медіани $BM$;
10. координати точки перетину висоти $AH$ і медіани $BM$.

Розв’язання.

1. Використаємо формулу відстані між двома точками:

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-3+7)^2 + (-4+1)^2}\sqrt{16+9} = 5.$$

   Отже, $BC = 5$.
2. Скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Беручи $x_1=-3,\ \ y_1=-4,\ \ x_2=-7,\ \ y_2=-1,$ дістаємо:

$$\frac{x+3}{-7+3}=\frac{y+4}{-1+4};$$

$$\frac{x+3}{-4}=\frac{y+4}{3};$$

$$3x+9=-4y-16;$$

$$3x+4y+25=0.$$

$$(BC):\ \ 3x+4y+25=0.$$

3. Щоб скласти рівняння висоти, яка проведена із точки $A$ на сторону $BC$, необхідно знати кутовий коефіцієнт висоти.

   Спочатку знайдемо кутовий коефіцієнт сторони $BC$:

   $$k_1=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}.$$

   З умови перпендикулярності двох прямих $k_1\cdot k_2=-1$ знайдемо кутовий коефіцієнт висоти $AH$:

   $$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{-\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}.$$

   Складаємо рівняння висоти, скориставшись формулою:

   $$y-y_1=k\left(x-x_1\right).$$

   $$y-1=\frac{4}{3}\left(x-9\right);$$

   $$3y-3=4x-36;$$

   $$4x-3y-33=0.$$

   $$(AH):\ \ 4x-3y-33=0.$$

4. Задача зводиться до знаходження відстані від точки $A$ до прямої $BC$, яка обчислюється за формулою

   $$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

   де $Ax+By+C=0-$рівняння прямої $BC$,

   $x_0,y_0-$координати точки $A$.

   Маємо:

   $$AH=d=\frac{\left|3\cdot 9+4\cdot 1+25\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{56}{5}=11{,}2.$$

   Довжина $AH=11{,}2.$

5. Бісектриса $BD$ трикутника $ABC-$це геометричне місце точок, рівновіддалених від прямих $BC$ і $BA$. Рівняння прямої $BC$: $3x+4y+25=0$ (дивись пункт 2). Аналогічно знаходимо рівняння прямої $BA$:

   $$\frac{x+3}{9+3}=\frac{y+4}{1+4};$$

   $$\frac{x+3}{12}=\frac{y+4}{5};$$

   $$5\left(x+3\right)=12\left(y+4\right);$$

$5x+15=12y+48;$

$5x-12y-33=0;$

$$\frac{|3x+4y+25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x-12y-33|}{\sqrt{5^2+12^2}}.$$

Для внутрішнього кута трикутника дістаємо:

$$\frac{3x+4y+25}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{-\left(5x-12y-33\right)}{\sqrt{5^2+12^2}};$$

$$\frac{3x+4y+25}{5}=\frac{-\left(5x-12y-33\right)}{13};$$

$13\left(3x+4y+25\right)=-5\left(5x-12y-33\right);$

$39x+52y+325=-25x+60y+165;$

$64x-8y+160=0;$

$8x-y+20=0.$

Отже, $8x-y+20=0.$

6. Площу трикутника обчислимо за формулою
$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{56}{5}=28$ êâ.î ä.

7. Шуканий кут можна обчислити як кут між прямими $BA$ і $BC$ через кутові коефіцієнти, тобто $tg\angle B=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$,

де $k_1$ і $k_2$ – кутові коефіцієнти прямих $AB$ і $BC$.

$$k_1=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{1-(-4)}{9-(-3)}=\frac{5}{12};$$

$$k_2=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-1-(-4)}{-7-(-3)}=-\frac{3}{4}.$$

Звідси, $tg\angle B=\dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}}=\dfrac{-\frac{14}{12}}{1-\frac{5}{16}}=\dfrac{-\frac{14}{12}}{\frac{11}{16}}=-\frac{56}{33}$,

$$\angle B=\pi-arctg\frac{56}{33}=3{,}14-1{,}04\approx 2{,}10.$$

8. Пряма, яка проходить через точку $A$ і паралельно до сторони $BC$, має кутовий коефіцієнт рівний кутовому коефіцієнту прямої $BC$.
Складаємо рівняння шуканої прямої, використавши формулу $y-y_1=k\left(x-x_1\right)$:

$$y-1=-\frac{3}{4}\left(x-9\right);$$

$4y-4=-3x+27;$

$3x+4y-31=0.$

9. За формулами $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}$; $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}$ знаходимо координати точки $M$:

$$x_M=\frac{9-7}{2}=\frac{2}{2}=1;$$

$y_M = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$

Отже, $M(1;0)$.

Рівняння медіани $BM$ складаємо як рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$\frac{x+3}{1+3} = \frac{y+4}{0+4};$

$x+3 = y+4;$

$x - y - 1 = 0.$

10. Щоб знайти координати точки перетину висоти $AH$ і медіани $BM$, необхідно розв'язати систему рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} 4x - 3y - 33 = 0, \\ x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 33 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -33 + 3 = 30;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 33 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 33 = -29.$$

Шукана точка перетину $(30;-29)$.

## Вправи

1. Знайти:
   1. довжину сторони $BC$;
   2. рівняння сторони $BC$;
   3. рівняння висоти $AH$, проведеної з точки $A$;
   4. довжину висоти, проведеної з точки $A$;
   5. рівняння бісектриси $BD$ внутрішнього кута $B$ трикутника;
   6. площу трикутника;
   7. кут $B$ у радіанах з точністю до двох знаків;
   8. рівняння прямої, яка проходить через точку $A$ і паралельно до сторони $BC$;
   9. рівняння медіани $BM$;
   10. координати точки перетину висоти $AH$ і медіани $BM$,

   якщо у трикутнику $ABC$ відомі координати вершин:
   1. $A(-9,8)$, $B(3,3)$, $C(9,11)$.
   2. $A(13;-6)$; $B(1;-1)$; $C(5;2)$.
   3. $A(10;-5)$; $B(-2;0)$; $C(2;3)$.
   4. $A(6;1)$; $B(-6;-4)$; $C(-10;-1)$.
   5. $A(-1;5)$; $B(11;0)$; $C(17;8)$.
   6. $A(-4;7)$; $B(8;2)$; $C(14;10)$.

7. $A(-7;2)$; $B(5;-3)$; $C(11;5)$.

8. $A(9;3)$; $B(-3;-2)$; $C(-7;1)$.