Найпростіші задачі аналітичної геометрії

1. **Відстань між двома точками.**

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. **Ділення відрізка у заданому відношенні.**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M поділяє відрізок M_1M_2 навпіл, тоді її координати будуть:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Різні види рівнянь прямої на площині

1. **Загальне рівняння прямої**. $Ax + By + C = 0$
2. **Параметричне рівняння прямої**

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \end{cases}$$

3. **Нормальне рівняння прямої.**

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

4. **Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** $y = kx + b,$ де $k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$
5. **Пряма, яка проходить через точку** $M_1(x_1, y_1)$ **і має кутовий коефіцієнт** k

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

6. **Канонічне рівняння прямої.**

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$

7. **Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки** $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

8. **Рівняння прямої у відрізках на осях**. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

Кут між прямими

1. Якщо $l_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $l_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$ то
   - кут між прямими $\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$
   - умова паралельності $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$
   - умова перпендикулярності $A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$
2. Якщо $l_1:\ y = k_1x + b_1$ та $l_2:\ y = k_2x + b_2$
   - кут між прямими $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
   - умова паралельності $k_1 = k_2.$
   - умова перпендикулярності $k_1 \cdot k_2 = -1.$
3. **Відстань від заданої точки** $M_0(x_0, y_0)$ **до прямої** $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Пряма в просторі

1. Параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \quad -\infty < t < \infty \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$$

2. Канонічними рівняннями прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

4. Загальне рівняння прямої в просторі

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0; \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Напрямні косинуси прямої

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, то пряма має дві трійки напрямних косинусів:

$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Кут між двома прямими

Розглянемо дві прямі l_1 та l_2, які задані канонічними рівняннями

$$(l_1) \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ та } (l_2) \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

1. Кут між прямими

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

2. Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3. Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Площина в просторі

1. **Нормальне рівняння площини.** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
2. **Загальне рівняння площини.** $Ax+By+Cz=D$
3. **Рівняння площини, що проходить через три точки.**

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4. **Рівняння площини у відрізках на осях.**

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{ñ}=1,$$

Кут між двома площинами

Кут між двома площинами, які задані рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ та $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ відповідно, знаходиться за формулою:

$$cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Умовою перпендикулярності площин є рівність:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Умовою паралельності площин є рівність відношень:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Відстань від точки до площини. $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

Кут між прямою і площиною

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p},$ а площина – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0,$ то синус кута між ними знаходять за формулою:

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Умова паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма задана канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p},$ а площина – загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0,$ то:

умова паралельності прямої і площини:

$$Am+Bn+Cp=0$$

умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

Криві другого порядку

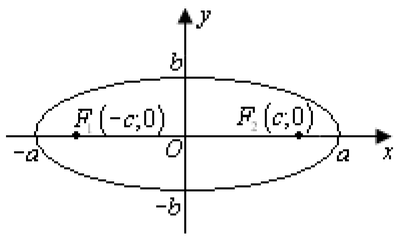
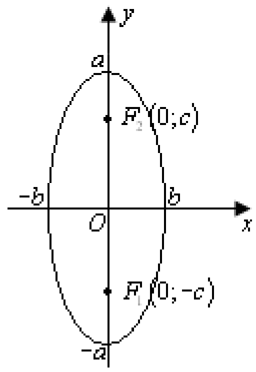
Коло

Канонічне рівняння кола. $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2.$

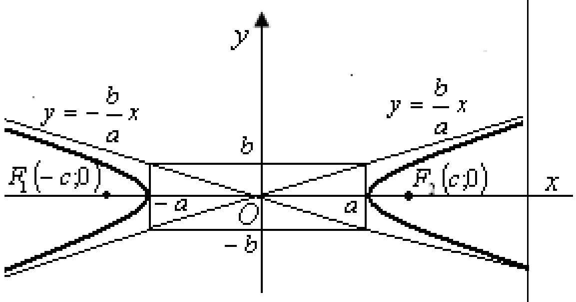
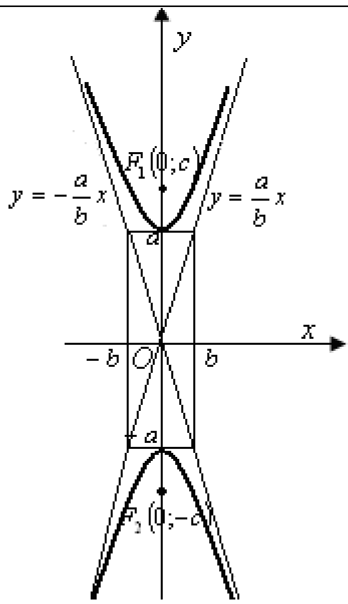
Якщо центр кола знаходиться в точці $O\left(0;0\right)$, а радіус дорівнює R, то рівняння кола має вигляд:

$$x^2+y^2=r^2.$$

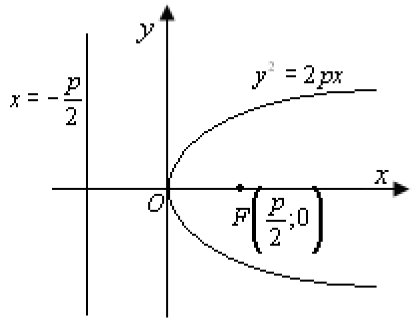
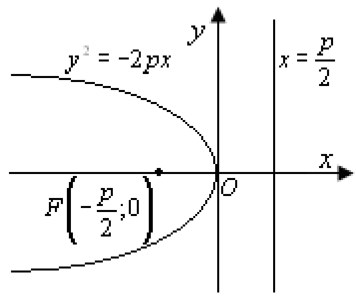
Еліпс

Еліпс, фокуси якого лежать на осі		
	Ox	*Oy*
Координати фокусів	$F_1\left(-c;0\right),\ \ F_2\left(c;0\right)$	$F_1\left(0;-c\right),\ \ F_2\left(0;c\right)$
Фокусна відстань	$2c$	
Велика вісь	*Горизонтальна, довжина* $2a$	*Вертикальна, довжина* $2a$
Мала вісь	*Вертикальна, довжина* $2b$	*Горизонтальна, довжина* $2b$
Залежність між параметрами	$a^2-b^2=c^2$	
Ексцентриситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1.$	
Рівняння	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ a>b$	$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1,\ \ a>b$
Графік кривої		

Гіпербола

	Гіпербола, фокуси якого лежать на осі	
	Ox	*Oy*
Координати фокусів	$F_1(-c;0),\ \ F_2(c;0)$	$F_1(0;-c),\ \ F_2(0;c)$
Фокусна відстань	$2c$	
Дійсна вісь	*Горизонтальна, довжина* $2a$	*Вертикальна, довжина* $2a$
Уявна вісь	*Вертикальна, довжина* $2b$	*Горизонтальна, довжина* $2b$
Залежність між параметрами	$b^2=c^2-a^2$	
Ексцентриситет	$\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$	
Асимптоти гіперболи	$y=\pm\dfrac{b}{a}x$	$y=\pm\dfrac{a}{b}x$
Рівняння	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
Графік кривої		
Рівностороння гіпербола $(a=b)$		
Асимптоти	$y=\pm x$	
Рівняння	$x^2-y^2=a^2$	$y^2-x^2=a^2$

Парабола

Парабола з віссю симетрії *Ox*		
Параметр параболи	$p>0$	
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
Рівняння директриси	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$
Рівняння	$y^2=2px$	$y^2=-2px$
Графік		
Парабола з віссю симетрії *Oy*		
Параметр параболи	$p>0$	
Координати фокуса	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
Рівняння	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
Графік