

Криві другого порядку

Кривою другого порядку називається множина точок площини координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Коло

Колом називається множина точок площини, рівновіддалених від даної точки, яка називається **центром**, а відстань – **радіусом**.

Канонічне рівняння кола. Якщо центр кола знаходиться в точці $O(a;b)$, а радіус дорівнює R , то рівняння кола має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола знаходиться в точці $O(0;0)$, а радіус дорівнює R , то рівняння кола має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Приклад 1. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ є рівнянням кола.

Розв'язання.

Виконаємо тотожні перетворення даного рівняння:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0;$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Отже, це рівняння є рівнянням кола з центром в точці $O(-2;1)$, радіус кола дорівнює 3.

Вправи

- Складіть рівняння кола, яке має:
 - центр у точці $A(-1;4)$ і проходить через точку $(3;5)$;
 - центр у точці $A(-3;0)$ і проходить через точку $(2;4)$.
- Складіть рівняння кола, кінці діаметра якого мають координати:
 - $(0;3)$ і $(6;-7)$;
 - $(-2;3)$ і $(2;5)$.
- Знайти координати точок перетину кола $3x^2 + 3y^2 - 18x - 10y - 48 = 0$ з осями координат.
- Знайти координати точок перетину кола $x^2 + y^2 + 4x + y - 12 = 0$ з осями координат.
- Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$.
- Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(2;8)$, $B(4;-6)$, $C(-12;-6)$.
- Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(-2;-6)$, $B(-3;1)$, $C(4;2)$.

Еліпс

Еліпсом називається множина точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок тієї самої площини стала і більша за відстань між цими точками.

Такі точки називаються **фокусами** еліпса, а відстань між ними – **фокусною відстанню**.

Фокуси еліпса позначають буквами F_1 і F_2 , відстань між фокусами – $2c$, суму відстаней від будь-якої точки еліпса до фокусів – через $2a$ ($2a > 2c$).

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані $2c$ до великої осі $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Ексцентриситет будь-якого еліпса задовольняє нерівність $0 < \varepsilon < 1$.

<i>Еліпс, фокуси якого лежать на осі</i>		
	<i>Ox</i>	<i>Oy</i>
<i>Координати фокусів</i>	$F_1(-c;0), F_2(c;0)$	$F_1(0;-c), F_2(0;c)$
<i>Фокусна відстань</i>	$2c$	
<i>Велика вісь</i>	<i>Горизонтальна, довжина $2a$</i>	<i>Вертикальна, довжина $2a$</i>
<i>Мала вісь</i>	<i>Вертикальна, довжина $2b$</i>	<i>Горизонтальна, довжина $2b$</i>
<i>Залежність між параметрами</i>	$a^2 - b^2 = c^2$	
<i>Ексцентриситет</i>	$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$	
<i>Рівняння</i>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a > b$
<i>Графік кривої</i>		

Приклад 1. Знайти довжину осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Розв'язання.

Приведемо це рівняння до канонічного вигляду. Для цього обидві частини рівняння розділимо на 144, одержимо:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Оскільки знаменник дробу з x^2 більший, то великою є горизонтальна вісь: $a^2 = 36, a = 6, 2a = 2 \cdot 6 = 12$ – довжина великої осі;

$b^2 = 16, a = 4, 2a = 2 \cdot 4 = 8$ – довжина малої осі.

Оскільки $c^2 = a^2 - b^2$, то $c = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Тоді координати фокусів: $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$, $F_2(2\sqrt{5}; 0)$.

Ексцентриситет еліпса знайдемо за формулою $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{6}{2\sqrt{5}}$.

Приклад 2. Скласти рівняння еліпса, фокусами якого є точки $F_1(0; -\sqrt{5})$, $F_2(0; \sqrt{5})$, а велика вісь дорівнює 6.

Розв'язання.

Фокуси лежать на осі Oy , то $a=3$ і рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $a > b$.

За формулою $b^2 = a^2 - c^2$, знаходимо, що $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$.

Підставивши у рівняння еліпса отримані значення маємо: $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Приклад 3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать у точках $(-4; 0)$, $(4; 0)$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$.

Розв'язання.

За умовою задачі $\varepsilon = 0,8$ і $\bar{n} = 4$. Тоді з формули $\varepsilon = \frac{c}{a}$ маємо:

$$0,8 = \frac{4}{a} \Leftrightarrow a = \frac{4}{0,8} = 5.$$

Для знаходження b використаємо тотожність $c^2 = a^2 - b^2$. Звідси, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Координати фокусів лежать на осі Ox , то рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Підставимо знайдені значення a і b в рівняння і отримаємо шукане рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Вправи

1. Складіть рівняння еліпса: 1) з фокусами на осі Ox , якщо $2a = 8$ і $2b = 6$; 2) з фокусами на осі Oy , якщо $2a = 10$ і $2b = 4$.
2. Складіть рівняння еліпса, якщо:
 - 1) дві його вершини лежать у точках $A_1(-6; 0)$ і $A_2(6; 0)$, а фокуси – в точках $F_1(-4; 0)$ і $F_2(4; 0)$.

- 2) дві його вершини лежать у точках $A_1(0;-8)$ і $A_2(0;8)$, а фокуси – в точках $F_1(-5;0)$ і $F_2(5;0)$.
3. Скласти рівняння еліпса, якщо:
- 1) відстань між фокусами дорівнює 6 (фокуси лежать на осі Ox) і велика вісь дорівнює 10.
 - 2) фокусами є точки $(-2;0)$ і $(2;0)$, а мала вісь дорівнює 8.
4. Знайти координати фокусів, відстань між ними та ексцентриситет еліпса, якщо задано рівняння:
- 1) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 - 2) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{26} = 1$.
5. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать у точках $(-\sqrt{3};0)$, $(\sqrt{3};0)$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{3}$.
6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо відстань між фокусами дорівнює 12, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.
7. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо його велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.
8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox , якщо:
- 1) сума півосей дорівнює 8, відстань між фокусами дорівнює 8.
 - 2) сума півосей дорівнює 25, а фокуси мають координати $(-5;0)$ і $(5;0)$.

Гіпербола

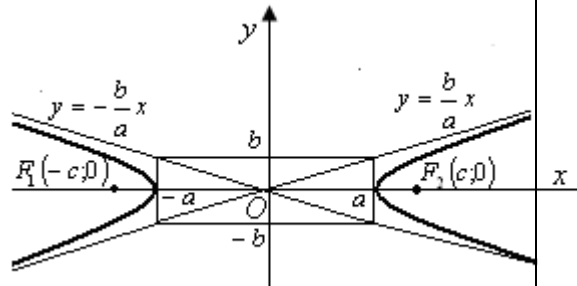
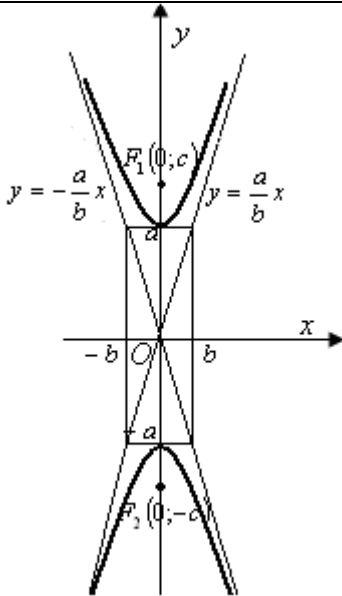
Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстані яких від двох даних точок цієї площини, що називаються **фокусами**, є величина стала і менша за відстань між фокусами.

Фокуси гіперболи позначають F_1 і F_2 , відстань між фокусами – $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. За означенням $a < c$.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної відстані $2c$ до її дійсної осі $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

<i>Гіпербола, фокуси якого лежать на осі</i>		
	Ox	Oy
<i>Координати фокусів</i>	$F_1(-c;0), F_2(c;0)$	$F_1(0;-c), F_2(0;c)$
<i>Фокусна відстань</i>	$2c$	
<i>Дійсна вісь</i>	<i>Горизонтальна, довжина $2a$</i>	<i>Вертикальна, довжина $2a$</i>
<i>Уявна вісь</i>	<i>Вертикальна, довжина $2b$</i>	<i>Горизонтальна, довжина $2b$</i>
<i>Залежність</i>	$b^2 = c^2 - a^2$	

між параметрами		
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$	
Асимптоти гіперболи	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
Рівняння	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Графік кривої		
Рівностороння гіпербола (a = b)		
Асимптоти	$y = \pm x$	
Рівняння	$x^2 - y^2 = a^2$	$y^2 - x^2 = a^2$

Приклад 1. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини лежать у точках $A_1(-3;0)$ і $A_2(3;0)$ і фокуси – в точках $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

Розв'язання.

З умови задачі випливає, що $a=3$, $c=5$. За формулою $b^2 = c^2 - a^2$ маємо:
 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 3$. Підставимо значення a і b в рівняння гіперболи одержимо:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Приклад 2. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Скласти рівняння асимптот гіперболи та обчислити ексцентриситет.

Розв'язання.

З умови задачі випливає, що $a=8$, $b=6$. Тоді рівняння асимптот має

вигляд $y = \pm \frac{6}{8}x = \pm \frac{3}{4}x$.

За формулою $b^2 = c^2 - a^2$ маємо: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Обчислимо ексцентриситет за формулою $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$.

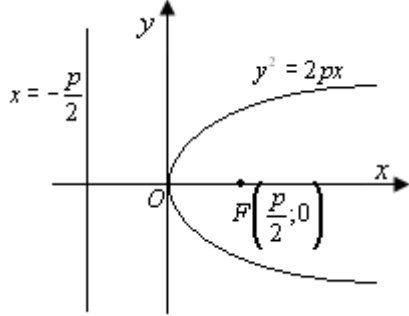
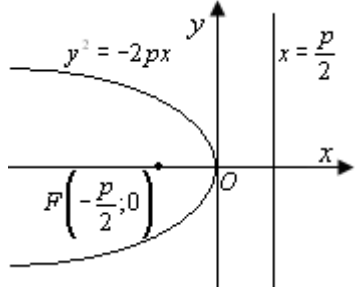
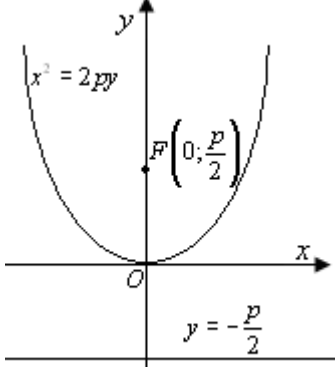
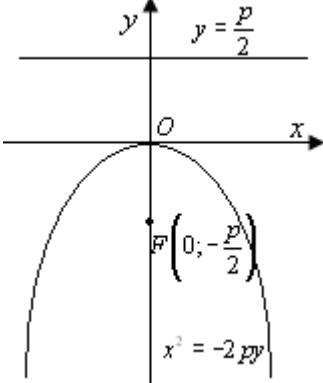
Вправи

1. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо її дійсна вісь дорівнює 16, а уявна вісь дорівнює 8.
2. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а уявна вісь дорівнює 40.
3. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини лежать у точках $A_1(-3;0)$ і $A_2(3;0)$, а фокуси – в точках $F_1(-3\sqrt{5};0)$, $F_2(3\sqrt{5};0)$.
4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 20.
5. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$. Знайти координати її вершин і фокусів. Обчислити ексцентриситет.
6. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{14} = 1$. Знайти координати її вершин і фокусів. Обчислити ексцентриситет.
7. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$. Запишіть рівняння асимптот.
8. Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Запишіть рівняння асимптот.
9. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $F_1(-20;0)$, $F_2(20;0)$, якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.
10. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $F_1(-2\sqrt{2};0)$, $F_2(2\sqrt{2};0)$, якщо ексцентриситет $\varepsilon = 2$.
11. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 12, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{4}{3}$.
12. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox , якщо довжина її дійсної осі дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Парабола

Параболою називається множина точок на площині, рівновіддалених від даної точки, яку називають фокусом, і від даної прямої, яку називають директрисою.

<i>Парабола з віссю симетрії Ox</i>		
<i>Параметр парабол</i>	$p > 0$	
<i>Координати фокуса</i>	$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$
<i>Рівняння директриси</i>	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$

Рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Графік		
Парабола з віссю симетрії Oy		
Параметр параболу	$p > 0$	
Координати фокуса	$F\left(0; \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$
Рівняння директриси	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Рівняння	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$
Графік		

Приклад 1. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(3;0)$.

Розв'язання.

Фокус параболу лежить на додатній півосі Ox , отже, рівняння параболу має вигляд $y^2 = 2px$.

Оскільки координати фокуса $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 3$, звідси $p = 6$. Підставивши одержане значення у рівняння одержимо $y^2 = 2 \cdot 6x = 12x$.

Приклад 2. Скласти рівняння параболу з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма $x = -4$.

Розв'язання.

Відстань директриси від початку координат дорівнює $\frac{p}{2}$, отже, $\frac{p}{2} = 4$, то $p = 8$. Оскільки абсциса директриси від'ємна, то рівняння параболу має вигляд $y^2 = 2px$. Підставивши у рівняння значення параметра p , дістанемо $y^2 = 2 \cdot 8x = 16x$.

Вправи

1. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокуси лежать в точках:
1) $F(-4;0)$; 2) $F(5;0)$; 3) $F(0;2)$; 4) $F(0;-3)$.
2. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її директрисою є пряма:
1) $x = -2$; 2) $x = 3$; 3) $y = -4$; 4) $y = 1$.
3. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Ox і проходить через точку:
1) $(5;-3)$; 2) $(-4;2)$; 3) $(-2;-2)$; 4) $F(4;2)$.
4. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку:
1) $(2;-3)$; 2) $(-3;1)$.
5. Складіть рівняння директриси параболи:
1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -10y$.
6. За даним рівнянням параболи обчисліть координати її фокусів:
1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 14y$; 4) $x^2 = -5y$.